INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Nevlastní integrál vlivem funkce
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0319
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	20.2.2014
Datum ověření ve výuce:	24.3.2014
Druh učebního materiálu:	prezentace
Očekávaný výstup:	Student si dělá poznámky k probíranému tématu a průběžně řeší předkládané úlohy
Metodické poznámky:	Materiál – prezentace – je určen jako osnova výkladu nového učiva resp. pro účely opakování

Nevlastní integrál vlivem funkce

Jaroslav Hajtmar

20.2.2014

Nevlastní integrály

Omezující předpoklady Riemanova integrálu:

- Integrační obor je konečný uzavřený interval $\langle a, b \rangle$.
- Integrovaná funkce $f(x)$ je na tomto intervalu ohraničená.

Integrály definované za těchto předpokladů – tzv. **vlastní integrály**.

Tato omezení lze jednoduchými úvahami odstranit!

Nevlastní integrál neomezené funkce

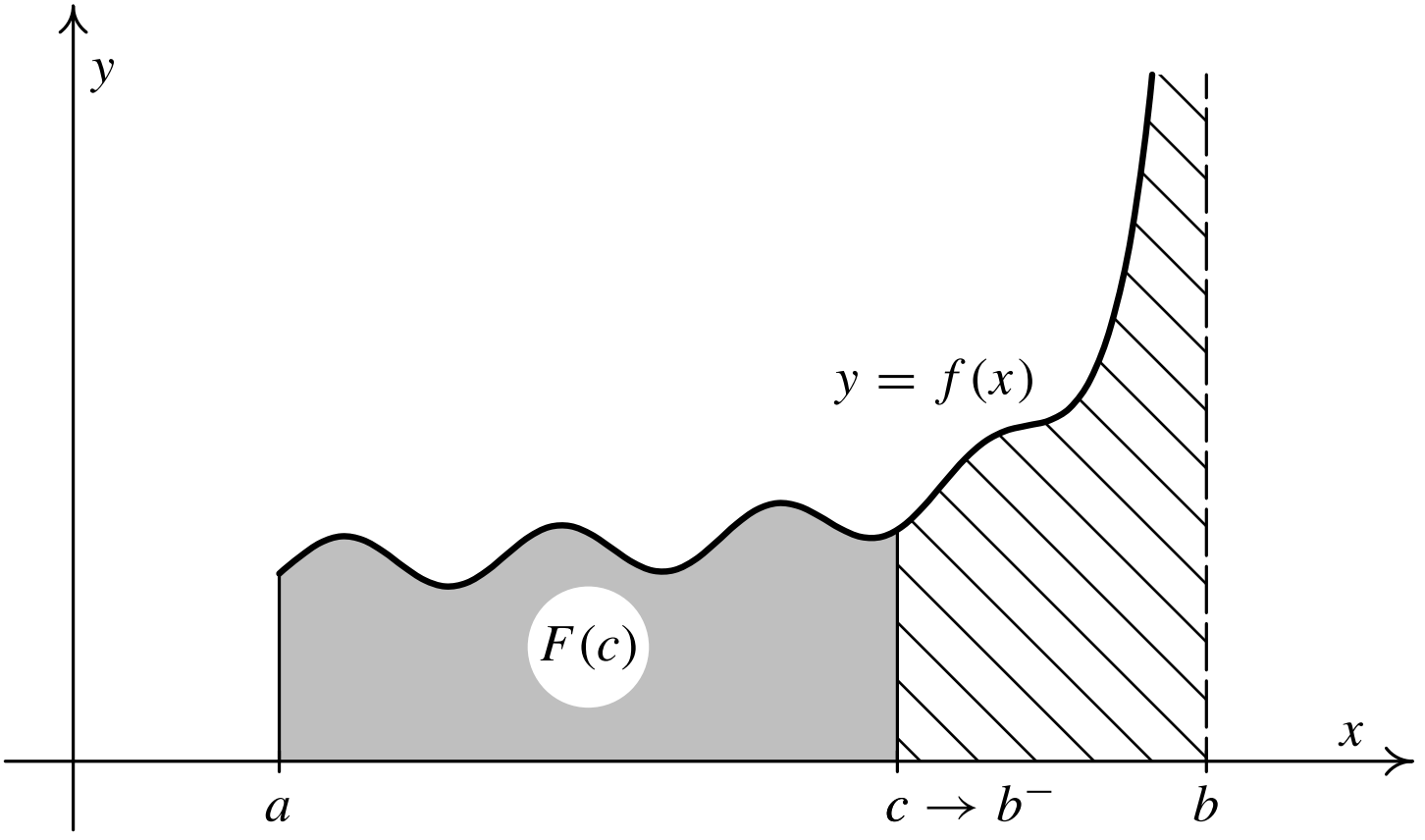
neboli **integrál nevlastní vlivem (neomezenosti) funkce** – nevlastní integrály 2. druhu.

Uvažujme funkci $f(x)$, která je definovaná na intervalu $\langle a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Předpokládejme, že je tato funkce spojitá na intervalu $\langle a, c)$ $\forall c \in \langle a, b)$. (Tedy existuje určitý integrál $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, zatímco $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$). Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a \leq c < b$$

Jak se chová veličina $F(c)$, když budeme c libovolně blízko přibližovat zleva bodu b? Zajímá nás, zda hodnota integrálu konverguje k číslu $L \in \mathbb{R}$ (existuje konečná limita), nebo zda se hodnota nekonečně zvětšuje resp. zmenšuje (limita je nevlastní), případně hodnota limity neexistuje (hodnota osciluje).

Integrál jako funkce horní meze



Interpretace obrázku

Velikost šedé plochy je funkční hodnota funkce $F(c)$ tj. hodnota integrálu $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$. Při posouvání meze $c \to b^-$ mohou nastat tyto možnosti:

- velikost šedé plochy (tj. hodnota tohoto integrálu) se blíží k nějakému konečnému číslu L (tj. existuje konečná limita funkce $F(c)$)
- velikost plochy roste (klesá) nade všecky meze (tj. limita funkce $F(c)$ je nevlastní)
- hodnota obsahu plochy neexistuje (tj. hodnota osciluje a limita funkce $F(c)$ vůbec neexistuje).

Definice nevlastního integrálu 2. druhu

DEF. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b)$, zatímco limita funkce $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$, pak integrál tvaru $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme **nevlastní integrál druhého druhu** (neohraničené funkce) a přiřazujeme mu hodnotu rovnu limitě

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to b^-} \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = L$$

Je-li L konečné číslo, říkáme, že uvažovaný nevlastní integrál je konvergentní, v opačném případě, tj. když limita je nevlastní (tj. $\mathrm{L} = +\infty$ nebo $\mathrm{L} = -\infty$) nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál je divergentní.

Úloha 1:

Vypočítejte nevlastní integrál $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

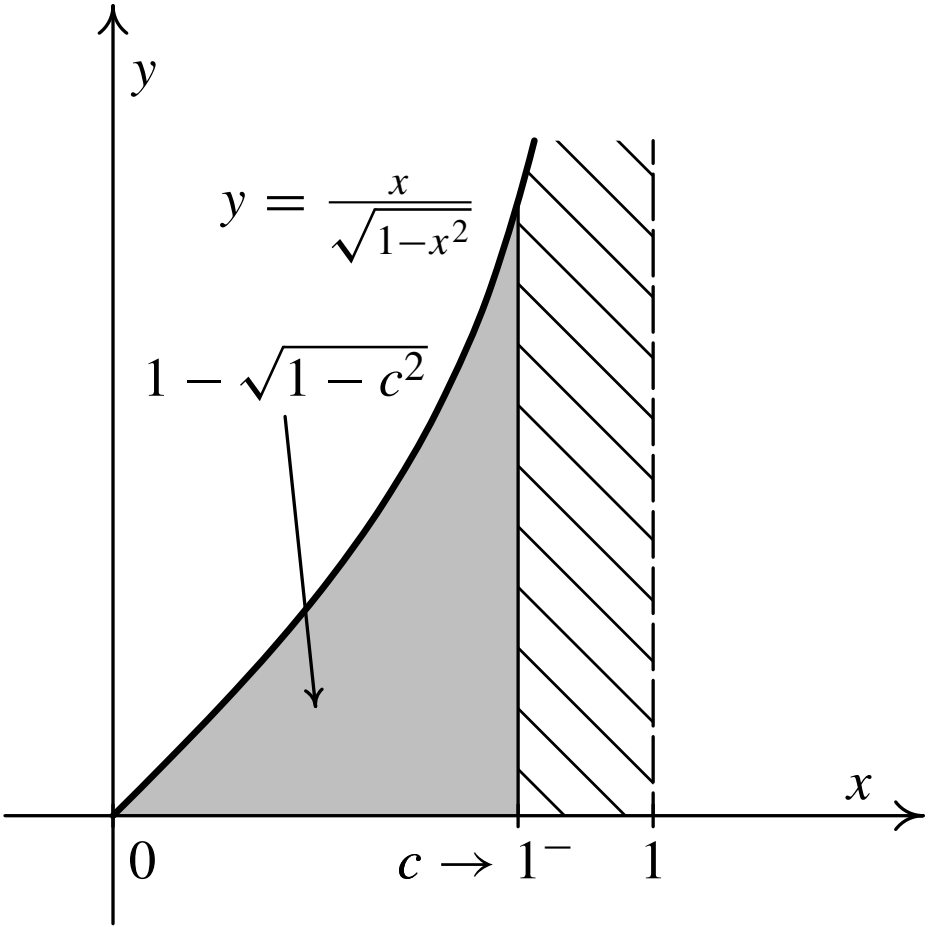
$$F(c)=\int_0^c \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ 1-x^2=t\\ -2xdx=dt\\ xdx=-\frac{1}{2}dt\\ 0\mapsto 1,\ c\mapsto 1-c^2\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int_1^{1-c^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^{1-c^2}=\left[\sqrt{t}\right]_{1-c^2}^{1}=$$

$=1-\sqrt{1-c^2}$. Vypočteme limitu pro $c\to 1^-$:

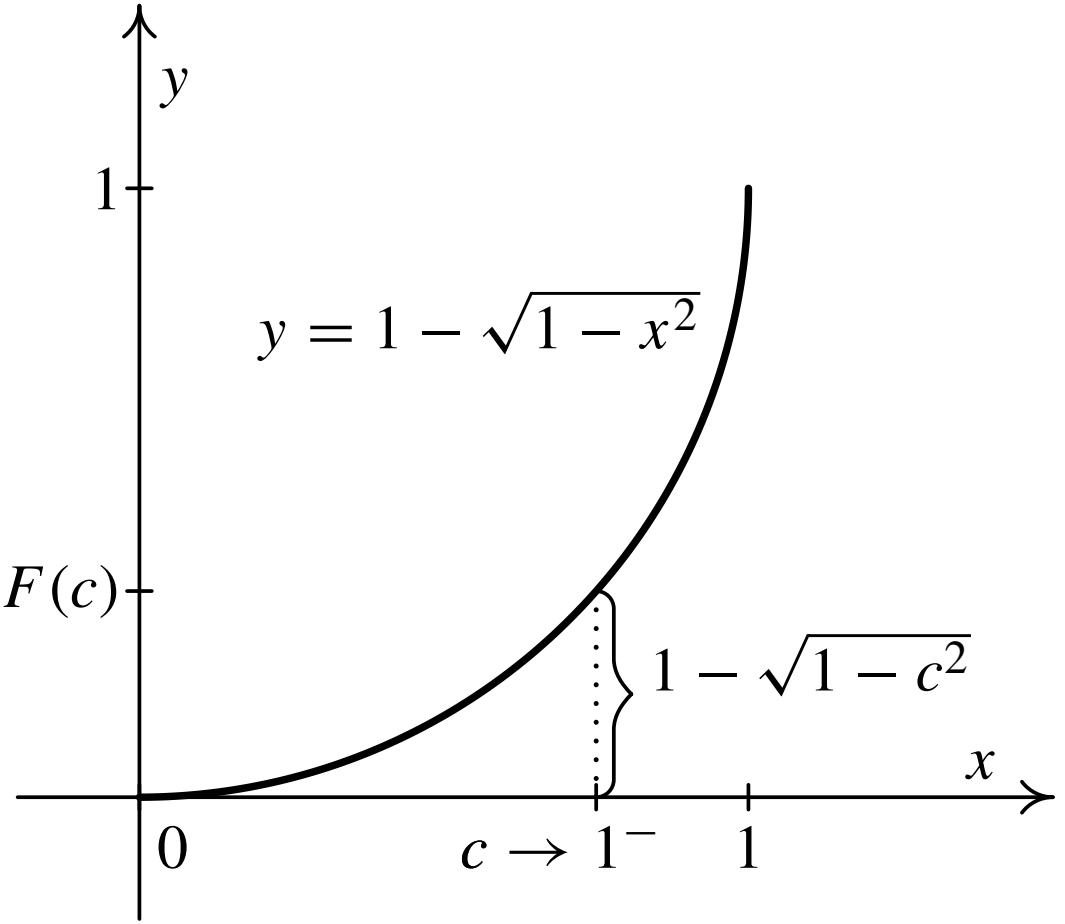
$$L=\lim_{c\to 1^-}F(c)=\lim_{c\to 1^-}\left(1-\sqrt{1-c^2}\right)=1-0=1\,.$$

Integrál je tedy konvergentní a platí: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=1\,.$

$$\int_0^c \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$



$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$



Úloha 2:

Ověřte, že nevlastní integrál $\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ je divergentní:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty,$$

jde skutečně o nevlastní integrál. (Funkce, jejímž grafem je rovnoosá hyperbola, má asymptotu bez směrnice $x = 0$.)

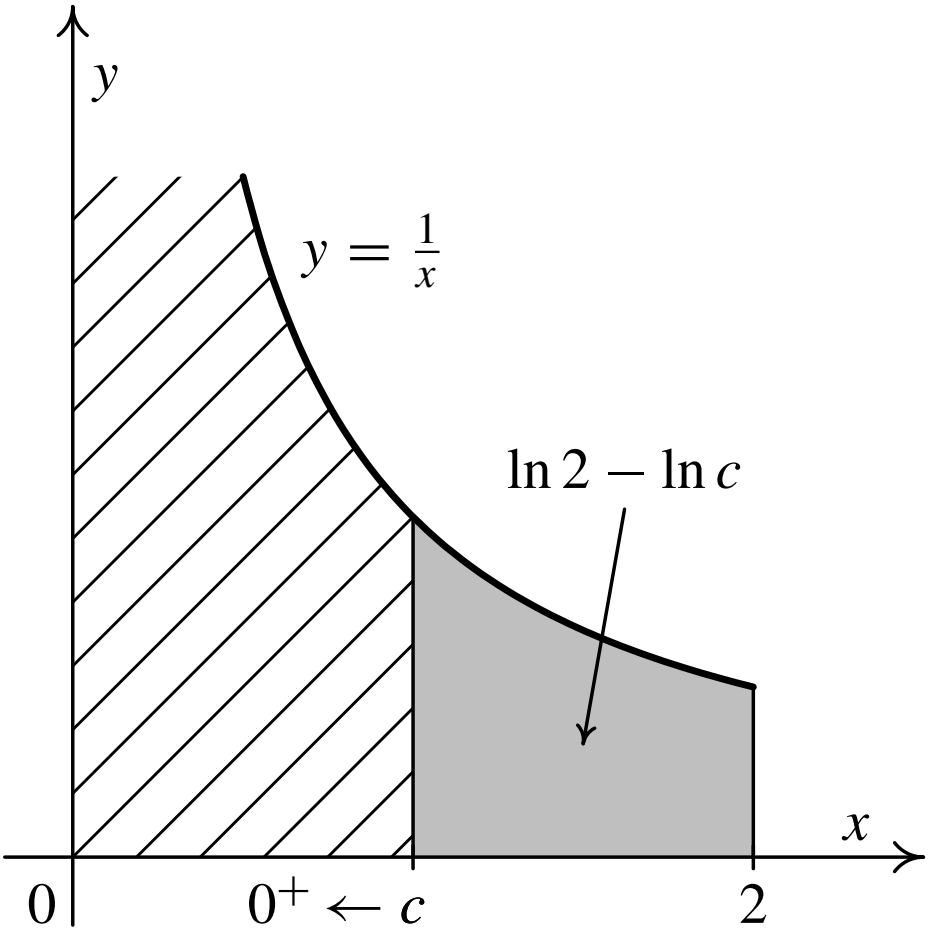
Nejprve vypočteme určitý integrál na intervalu $\langle c, 2\rangle$, $0 < c \leqq 2$:

$$\int_c^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \big[\ln x\big]_c^2 = \ln 2 - \ln c.$$

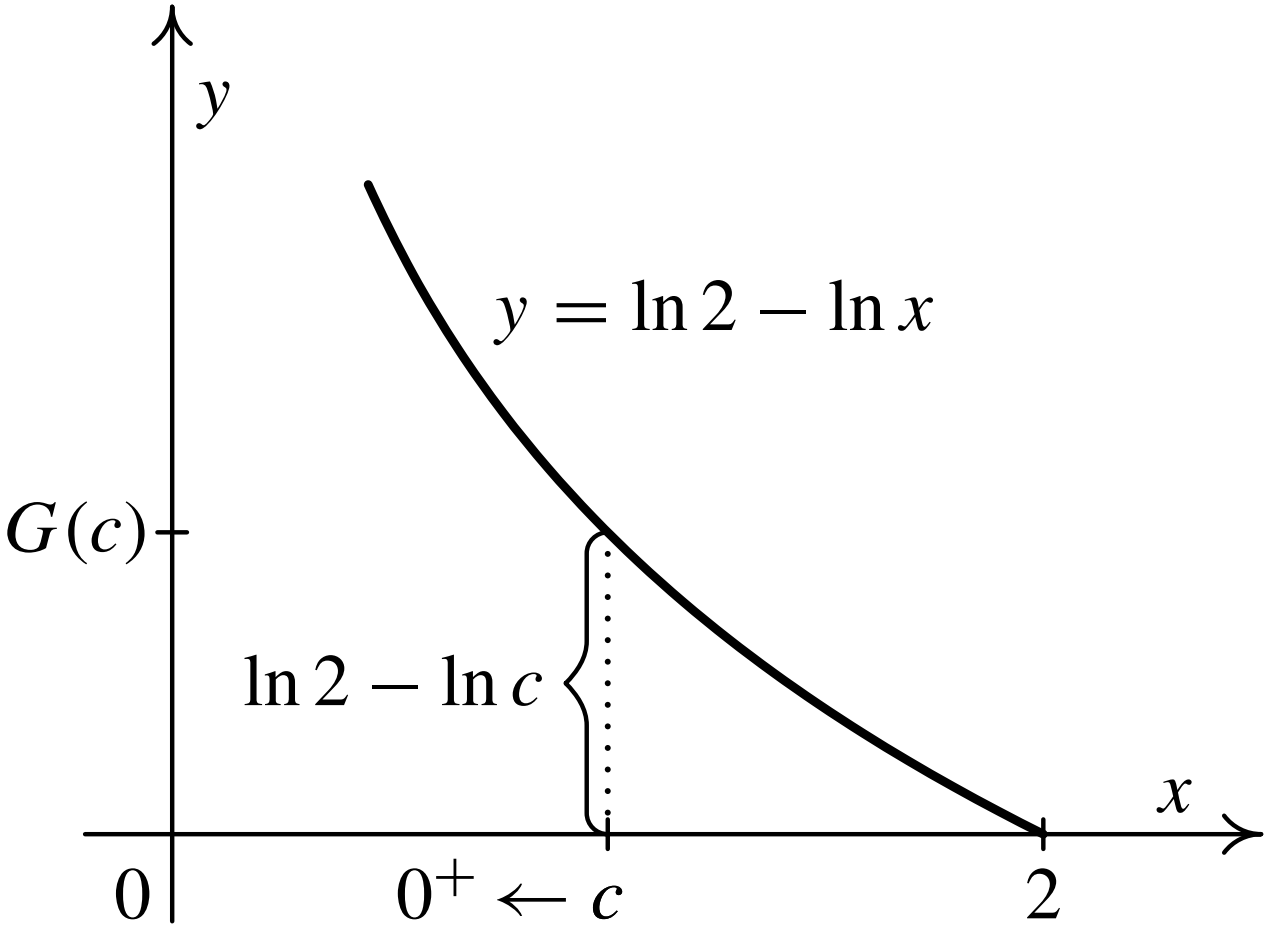
Dále vypočteme limitu pro $c \to 0^+$:

$$\lim_{c\to 0^+} (\ln 2 - \ln c) = \ln 2 - (-\infty) = +\infty.$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{x}$$



$$\int_0^2 \frac{dx}{x}$$



Poznámka:

Má-li integrovaná funkce $f : y = f(x)$ více bodů, v nichž je funkce neohraničená, pak:

- Rozdělíme interval integrace na tolik dílčích intervalů, aby v každém z nich byl jediný bod v horní nebo v dolní mezi, ve kterém je limita nevlastní.
- Konvergují-li nevlastní integrály ve všech těchto dílčích intervalech, pak za jeho hodnotu na celém intervalu považujeme součet jeho hodnot na dílčích intervalech.
- Je-li nevlastní integrál divergentní aspoň na jednom dílčím intervalu, považujeme jej za divergentní na celém intervalu.

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kreml P., Vlček J., Volný P., Krček J., Poláček J., Matematika II [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. Dostupné z WWW: <http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/>
- Archiv autora