



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Vzdělávací materiál vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

# Anotace

<b>Název tematické oblasti:</b>	Integrální počet
<b>Název učebního materiálu:</b>	Povrch rotačního tělesa
<b>Číslo učebního materiálu:</b>	VY_32_INOVACE_M0317
<b>Vyučovací předmět:</b>	Matematika
<b>Ročník:</b>	4. ročník vyššího gymnázia
<b>Autor:</b>	Jaroslav Hajtmar
<b>Datum vytvoření:</b>	17.2.2014
<b>Datum ověření ve výuce:</b>	17.3.2014
<b>Druh učebního materiálu:</b>	prezentace
<b>Očekávaný výstup:</b>	Student si dělá poznámky k probíranému tématu a průběžně řeší předkládané úlohy
<b>Metodické poznámky:</b>	Materiál – prezentace – je určen jako osnova výkladu nového učiva resp. pro účely opakování

# Povrch rotačního tělesa

Jaroslav Hajtmar

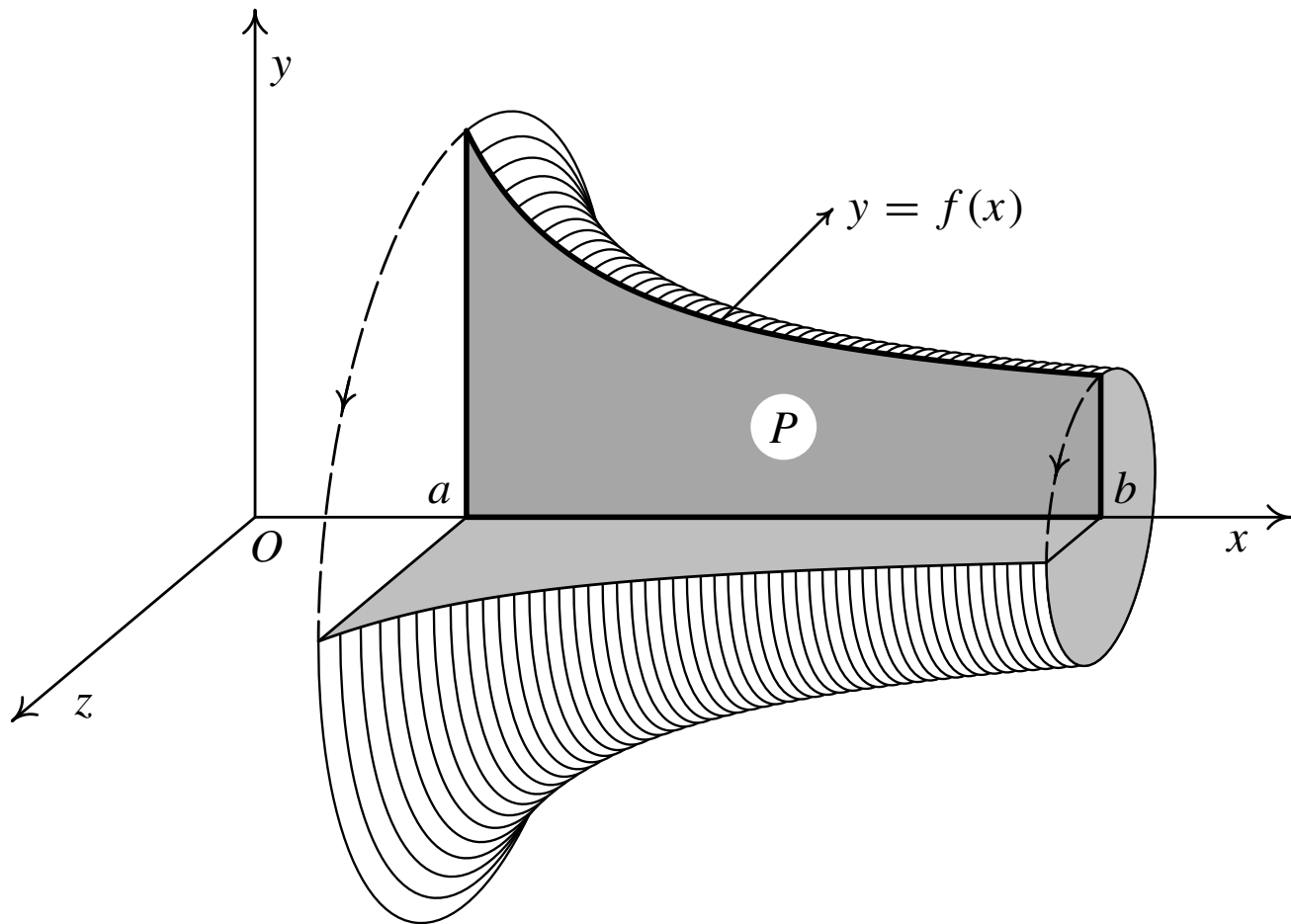
17.2.2014

# Povrch rotačního tělesa

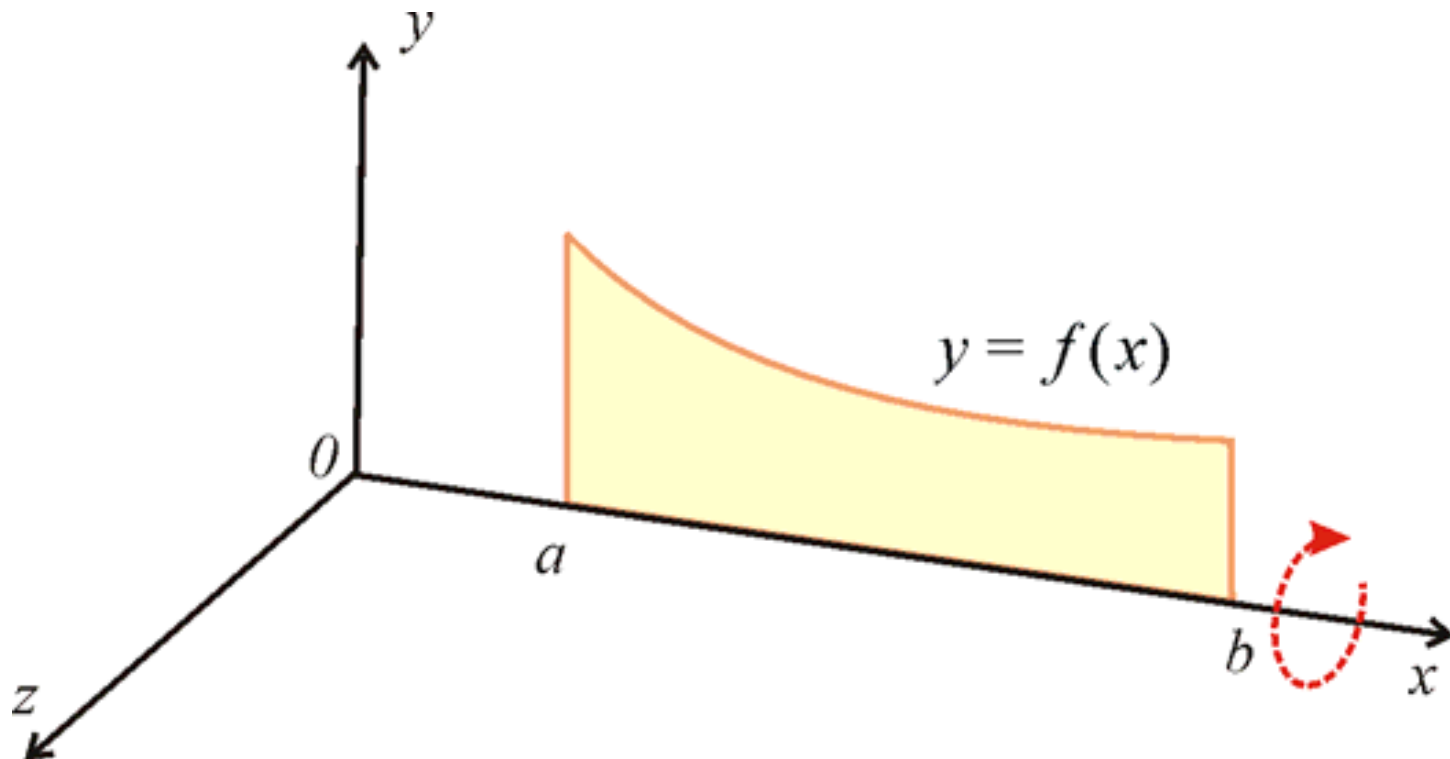
## Princip:

- Řezy kolmými na osu rozřežeme těleso na „plátky“. Tentokrát nás zajímá „slupka“ jednotlivých plátků.
- Každý plátek můžeme aproximovat pláštěm jistého komolého kužele. Plášť vytvoří úsečka  $\Delta s_i$ , rotující kolem osy  $o_x$ .
- Aproximace povrchu pláště tělesa závisí na charakteru funkce a na počtu vepsaných komolých kuželů.
- Postupně zjemňujeme dělení intervalu – aproximace se zvětšuje.
- Obsah každého „plošného elementu“ je kladné reálné číslo.
- Plošné elementy (kladná čísla jako v případě aproximace obsahů ploch) sečteme pomocí určitého integrálu.

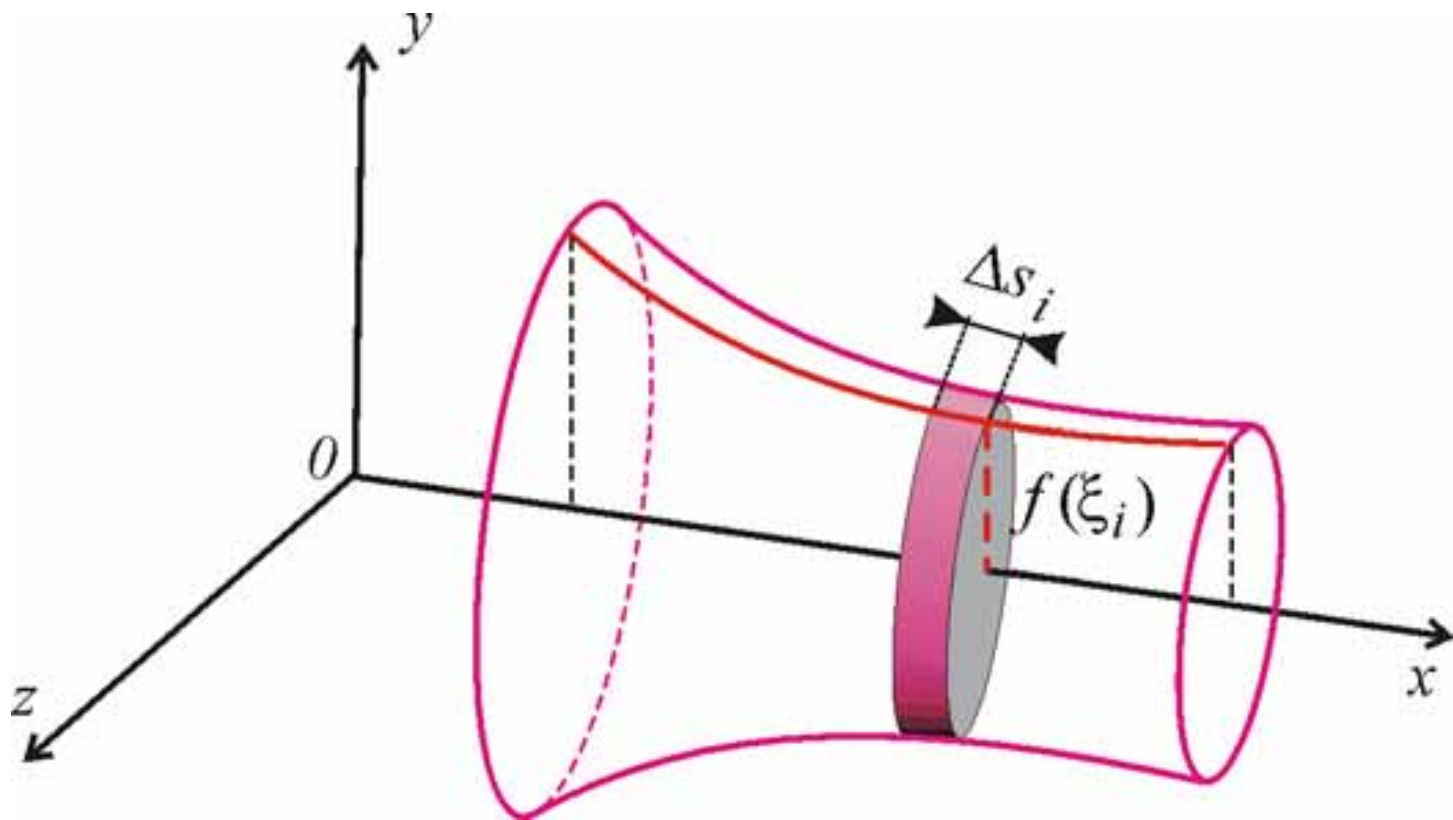
# Rozřežeme rotační těleso na „plátky“



# Rotace křivočarého lichoběžníka kolem $o_x$



# Povrchový element



## Povrchový element:

Komolý kužel o poloměru podstavy  $f(\xi_i)$ , výšce  $\Delta x_i$  a straně  $\Delta s_i$ .

## Povrch pláště – povrchového elementu je:

$$\Delta S_i \approx 2\pi \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta s_i$$

## Povrch pláště celého tělesa

Přibližně roven součtu povrchů plátků (komolých kuželů) tj:

$$S \approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta s_i$$

## Zjemňujeme dělení

Čím bude dělení intervalu jemnější, tím méně se bude součet povrchů plátků lišit od povrchu pláště daného tělesa.

**Povrch pláště definujeme jako limitu tohoto součtu pro  $n \rightarrow \infty$  tj.  $\Delta s_i \rightarrow 0$ .**



Klademe tedy:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \, ds$$

**Délkový element  $ds$  :**

Z kapitoly o délce křivky víme, že pro element délky křivky  $ds$  platí:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Dosazením do předchozího vzorce dostaneme:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

## Povrch pláště rotačního tělesa

Nechť je funkce  $f(x)$  spojitá a nezáporná na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má zde spojitou derivaci  $f'(x)$ . Pak pro obsah rotační plochy vzniklé rotací oblouku křivky  $f: y = f(x)$  kolem osy  $o_x$  platí:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

**POZN:** Pokud chceme spočítat povrch celého rotačního tělesa, musíme přičíst k ploše pláště ještě obsahy dvou kruhů, které tvoří pomyslné podstavy rotačních těles. Kruhy mají poloměry  $f(a)$  a  $f(b)$ , kde  $a, b$  jsou integrační meze.

Podstavy tak mají obsahy  $S_1 = \pi f^2(a)$ ,  $S_2 = \pi f^2(b)$ .

# Odvození základních vzorců

## Úloha:

Ověřte základní vzorec pro povrch kužele s podstavou o poloměru  $r$  a výškou  $v$ .

Návod: Umístěte do souřadné soustavy vhodně přímku, jejíž rotací kolem osy  $o_x$  na jistém intervalu vznikne požadovaný kužel a následně určete jeho povrch.

## Úloha:

Ověřte základní vzorec pro povrch koule o poloměru  $r$ .

Návod: Umístěte do souřadné soustavy vhodně kružnici, jejíž rotací kolem osy  $o_x$  na jistém intervalu vznikne požadovaná koule.

# Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <<http://home1.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>>.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kreml P., Vlček J., Volný P., Krček J., Poláček J., Matematika II [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. Dostupné z WWW: <<http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/>>
- Archiv autora