

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Vzdělávací materiál vytvořený v projektu OP VK

<b>Název školy:</b>	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
<b>Číslo projektu:</b>	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
<b>Název projektu:</b>	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
<b>Číslo a název klíčové aktivity:</b>	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

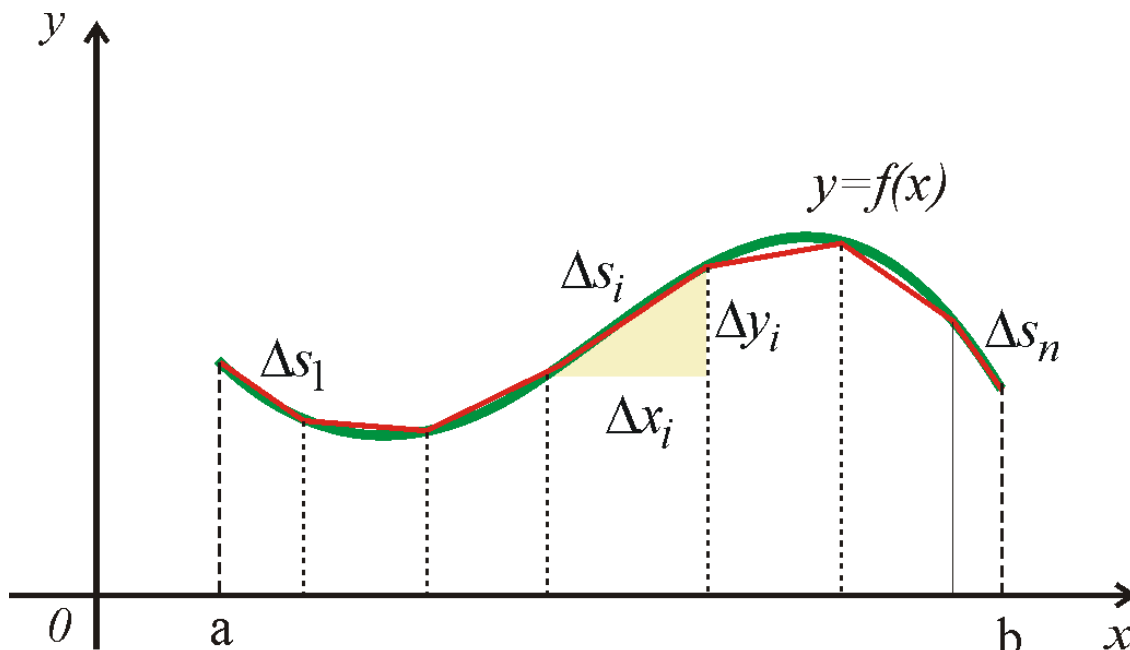
## Anotace

<b>Název tematické oblasti:</b>	Integrální počet
<b>Název učebního materiálu:</b>	Délka oblouku křivky
<b>Číslo učebního materiálu:</b>	VY_32_INOVACE_M0316
<b>Vyučovací předmět:</b>	Matematika
<b>Ročník:</b>	4. ročník vyššího gymnázia
<b>Autor:</b>	Jaroslav Hajtmar
<b>Datum vytvoření:</b>	10.2.2014
<b>Datum ověření ve výuce:</b>	12.3.2014
<b>Druh učebního materiálu:</b>	pracovní list
<b>Očekávaný výstup:</b>	Na základě předložených vztahů zvládne vypočítat délku křivky zadané explicitním nebo implicitním vztahem.
<b>Metodické poznámky:</b>	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o aplikacích určitého integrálu. Může být použit k získání klasifikace.

## Délka oblouku křivky

### Princip:

- Nahrazení křivky lomenou čarou
- Aproximace délky křivky závisí na charakteru funkce a na počtu aproximačních úseček.
- Postupně zjemňujeme dělení intervalu – aproximace úsečkami se zvětšuje.
- Délka každého „délkového elementu“ je kladné reálné číslo.
- Délkové elementy (kladná čísla) sečteme pomocí určitého integrálu.



### Délkový element:

Úsečka – přepona pravoúhlého trojúhelníka s odvědnami  $\Delta x_i$  a  $\Delta y_i$

### Délka elementu je:

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

### Délka celé křivky (na daném intervalu):

Přibližně roven součtu délek jednotlivých úseček tj:

$$s \approx \sum_{i=1}^n \Delta s_i$$

### Zjemňujeme dělení

Čím bude dělení intervalu jemnější, tím se bude součet délek úseček lišit od délky celé křivky.

**Délku definujeme jako limitu tohoto součtu. Pro  $n \rightarrow \infty$  a normu dělení  $\nu(D_n) \rightarrow 0$  bude  $\Delta x \rightarrow dx$  a  $\Delta y \rightarrow dy$ .**

Dále si uvědomíme, že  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Pro uvažovanou délku dostaneme:

$$s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

a odtud:

$$s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

### Délka oblouku křivky

Nechť je funkce  $f(x)$  definovaná na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má zde spojitou derivaci. Pak délka této křivky je:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

### Úloha:

Vypočtěte délku oblouku křivky  $y = x\sqrt{x}$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$$

Nyní pro délku křivky platí:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_1^{\frac{13}{4}} \sqrt{t} dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[ t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{\frac{13}{4}} = \frac{8}{27} \cdot \left( \frac{13}{8} \sqrt{13} - 1 \right)$$

---

Podle předchozího návodu vypočítejte délky křivek:

**Úloha 1.** Určete délku řetězovky na intervalu  $\langle 0, 3 \rangle$ . Řetězovka je křivka určená funkcí  $f: y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

**Úloha 2.**  $f: y = \ln x, \quad x \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle$

**Úloha 3.**  $f: y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$

**Úloha 4.**  $f: y = \frac{x^2}{4} + \frac{\ln x}{2}, \quad x \in \langle 1, e \rangle$

**Úloha 5.**  $f: y = \ln(1 - x^2), \quad x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$

**Úloha 6.**  $f: y = 1 - \ln \cos x, \quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$

## Výsledky úloh

1.  $\frac{1}{2} \left( e^3 - \frac{1}{e^3} \right)$
2.  $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$
3. 4
4.  $\frac{e^2-1}{4}$
5.  $2 \ln 3 - \frac{1}{2}$
6.  $\ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$

## Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrovaný počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <http://home1.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kreml P., Vlček J., Volný P., Krček J., Poláček J., Matematika II [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. Dostupné z WWW: <http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/>
- Archiv autora