INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Obsah plochy omezené křivkou
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0312
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	28.1.2014
Datum ověření ve výuce:	26.2.2014
Druh učebního materiálu:	prezentace
Očekávaný výstup:	Student si dělá poznámky k probíranému tématu a průběžně řeší předkládané úlohy
Metodické poznámky:	Materiál – prezentace – je určen jako osnova výkladu nového učiva resp. pro účely opakování

Obsah plochy omezené křivkou

Jaroslav Hajtmar

28.1.2014

Aplikace určitého integrálu

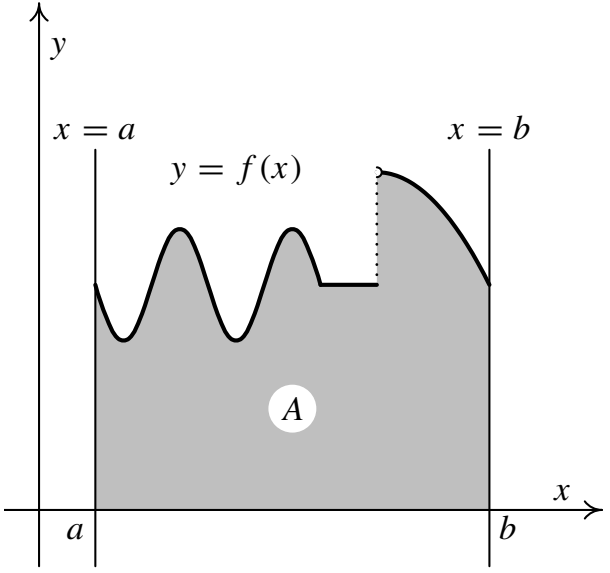
Využití určitého integrálu je velmi široké.
Náš zájem bude zahrnovat:

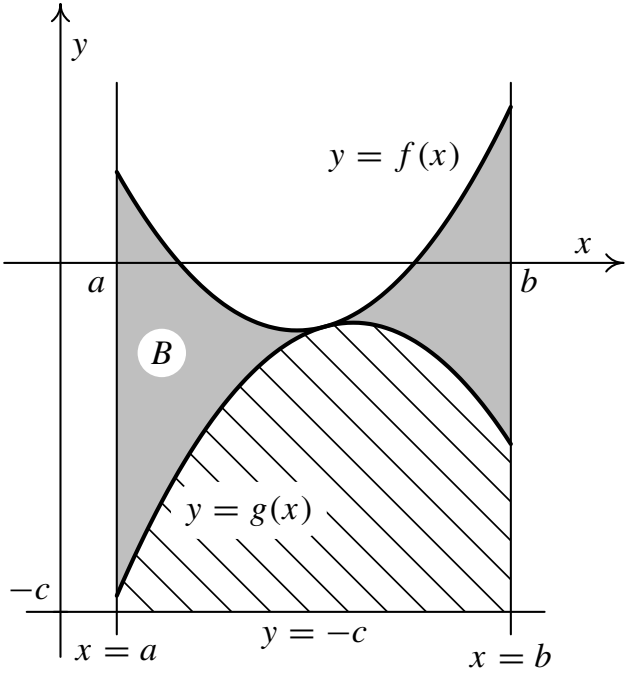
- Výpočet obsahu plochy
- Výpočet objemu rotačního tělesa
- Výpočet délky křivky
- Výpočet povrchu rotačního tělesa

Všeobecný postup při řešení geometrických úloh:

- Převod řešení na výpočet určitého integrálu.
- Výpočet určitého integrálu.
- Geometrická interpretace výsledku.

Převod řešení na výpočet určitého integrálu

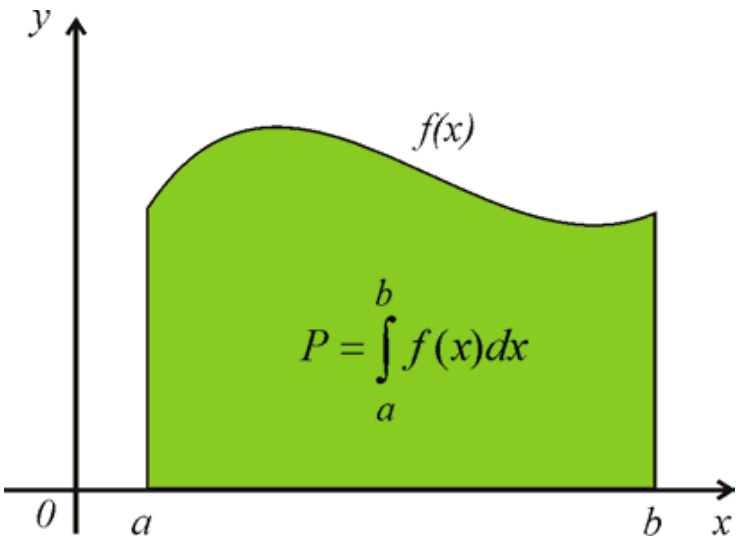




Obsah křivočarého lichoběžníka

Nechť je funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ integrovatelná a nabývá pouze nezáporných hodnot. Pak pro obsah tzv. **křivočarého lichoběžníka** ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, zleva přímkou $x = a$, zprava přímkou $x = b$ a zdola osou o_x platí:

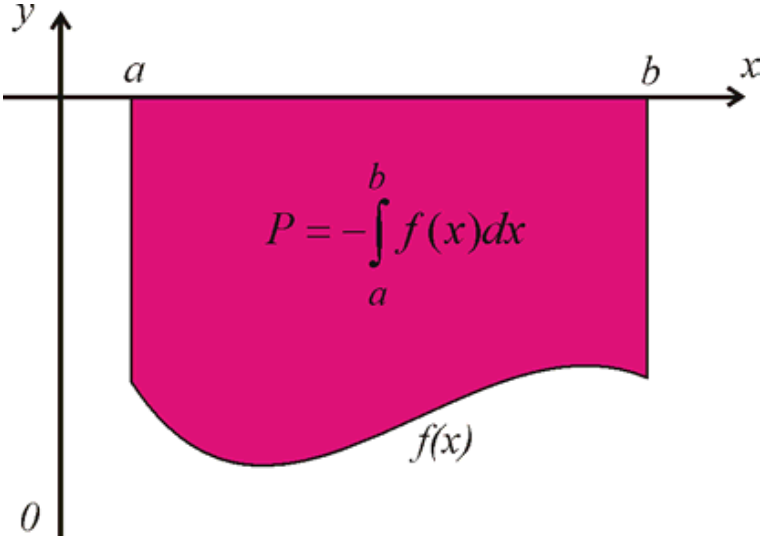
$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Obsah křivočarého lichob. pro nekladnou funkci

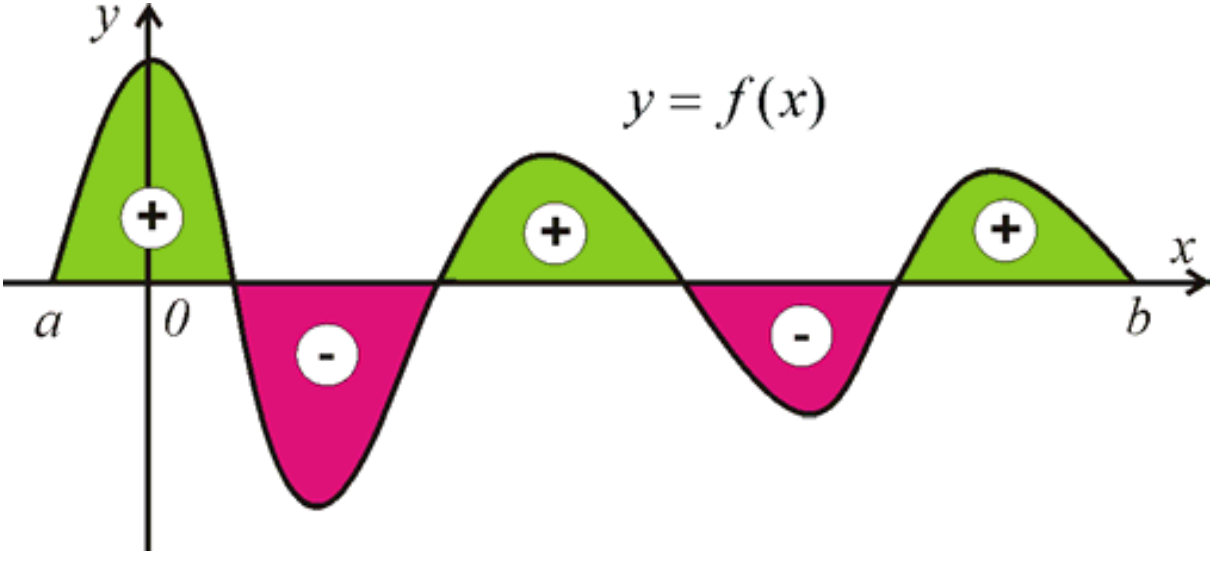
Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ integrovatelná a nabývá pouze záporných hodnot, pak pro obsah **křivočarého lichoběžníka** platí:

$$P = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$



Určitý integrál obecné funkce

Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ integrovatelná a nabývá na něm kladných i záporných hodnot, pak hodnota určitého integrálu neodpovídá ploše omezené křivkou a osou o_x:

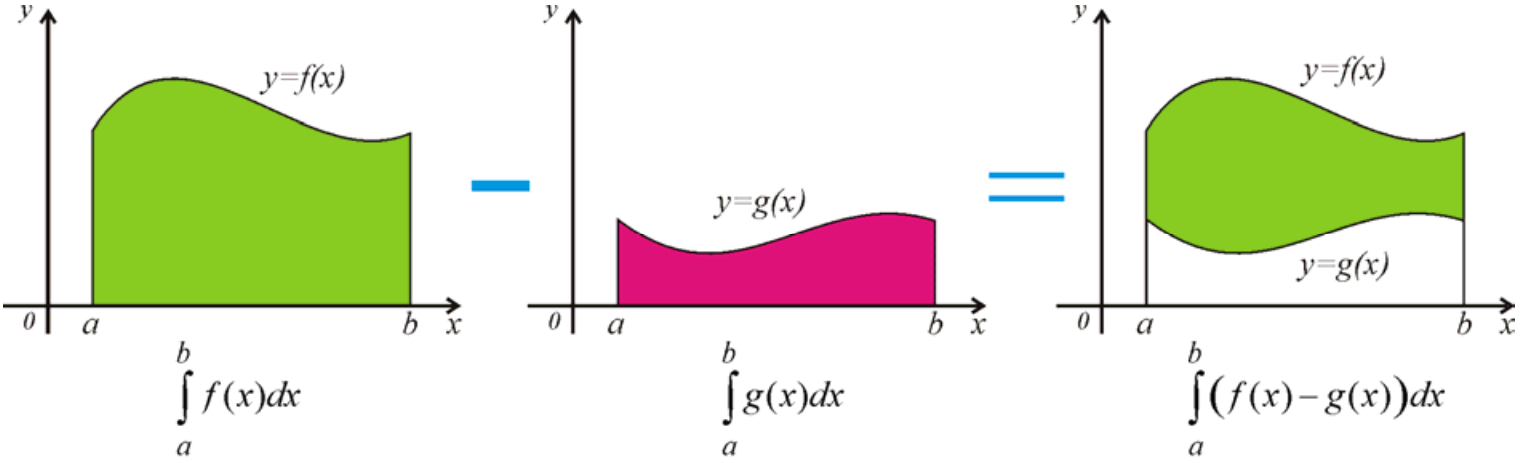


Pro výpočet plochy musíme rozdělit integrační interval na samostatné podintervaly, určit jednotlivé plochy a ty pak sečíst!

Obsah plochy omezené dvěma křivkami

Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $g(x) \leq f(x), \forall x \in \langle a, b\rangle$. Pak plocha oblasti ohraničené zdola grafem funkce $g(x)$, shora grafem funkce $f(x)$, zleva přímkou $x = a$ a zprava přímkou $x = b$ platí:

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,\mathrm{d}x$$



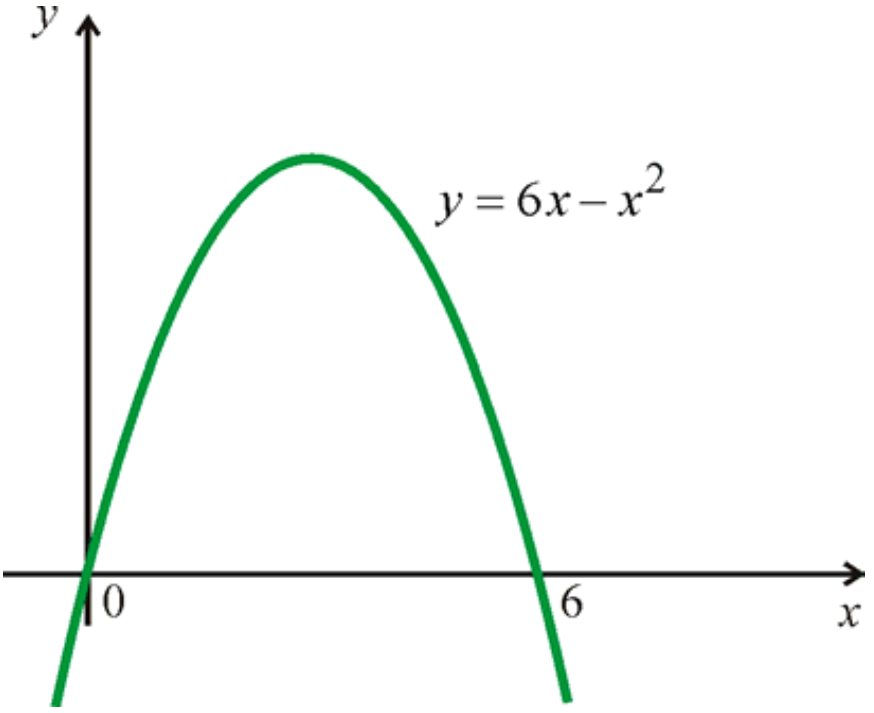
Praktický výpočet ploch

Příklad: Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného osou o_x a křivkou $y = 6x - x^2$.

Postup:

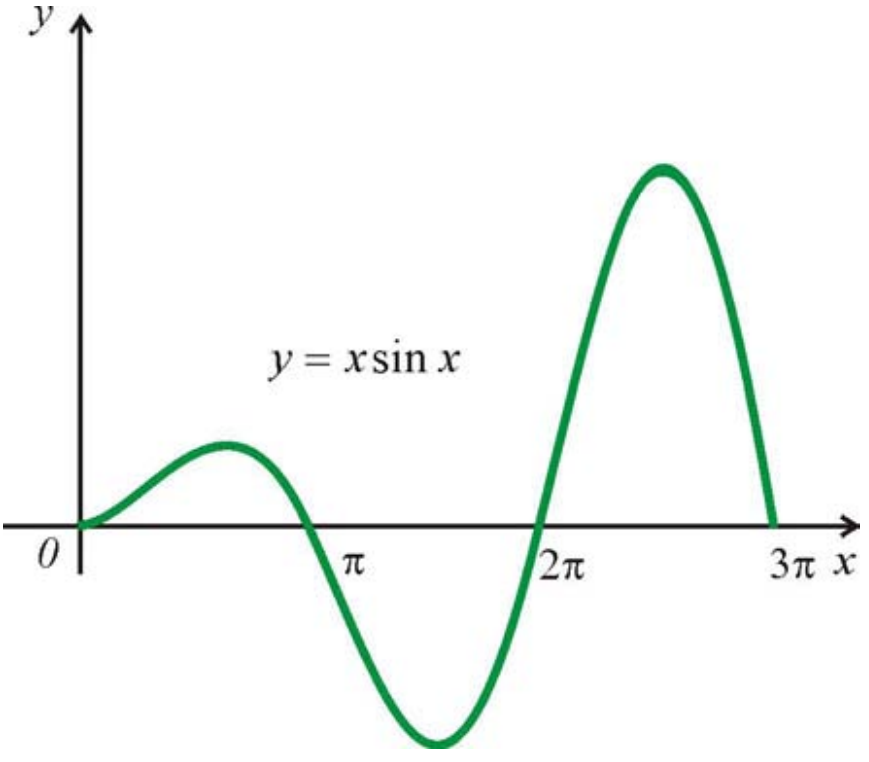
- Nákres
- Výpočet integračních mezí
- Výpočet obsahu plochy

Obsah plochy omezené křivkou a osou o_x



$$P = \int_0^6 (6x - x^2)\,dx = \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^6 = 108 - 2 \cdot 36 = 36\,.$$

Příklad: Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = x \cdot \sin x$, osou o_x a přímkami $x = 0$, $x = 3\pi$.



Obsah plochy omezené křivkou a osou o_x

$$P = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x \, dx \, .$$

Potřebnou primitivní funkci k funkci $y = x \sin x$ nalezneme metodou per partes:

$$\int x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} u' = \sin x & v = x \\ u = -\cos x & v' = 1 \end{vmatrix} = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \sin x - x \cos x \, .$$

Dosadíme příslušné meze:

$$P = \left[\sin x - x \cos x\right]_0^{\pi} - \left[\sin x - x \cos x\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[\sin x - x \cos x\right]_{2\pi}^{3\pi} =$$

$$= \left[0 - \pi(-1) - 0 + 0\right] - \left[0 - 2\pi - 0 + \pi(-1)\right] + \left[0 - 3\pi(-1) - 0 + 2\pi\right] = \pi + 3\pi + 5\pi = 9\pi \, .$$

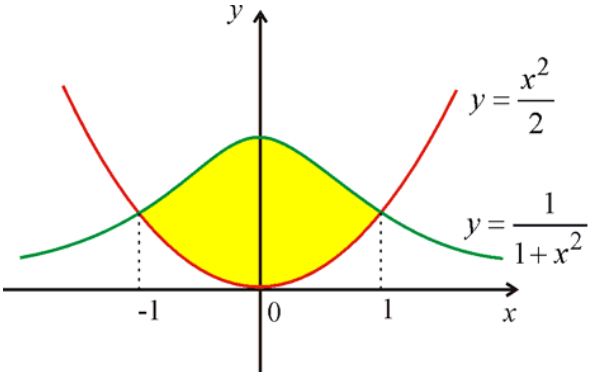
Příklad: Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami, které jsou grafy funkcí $y = \frac{1}{1+x^2}$ a $y = \frac{x^2}{2}$.

Postup:

- Nákres obou grafů
- Výpočet průsečíků grafů (určíme integrační meze)
- Výpočet obsahu plochy užitím určitého integrálu

Řešení:

- Nákres:



- Výpočet průsečíků obou grafů:

  Průsečíky získáme řešením rovnice $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}$.

  Po úpravě dostaneme $x^4 + x^2 - 2 = 0$, tedy $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2) = 0$.

  Rovnice má dva reálné kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$ (integ. meze).

- Výpočet obsahu plochy užitím určitého integrálu:

$$P = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \left[\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora