evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Určitý integrál – zavedení pojmu
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0309
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	20.1.2014
Datum ověření ve výuce:	17.2.2014
Druh učebního materiálu:	prezentace
Očekávaný výstup:	Student si dělá poznámky k probíranému tématu a průběžně řeší předkládané úlohy
Metodické poznámky:	Materiál – prezentace – je určen jako osnova výkladu nového učiva resp. pro účely opakování

Určitý integrál – zavedení pojmu

Jaroslav Hajtmar

20.1.2014

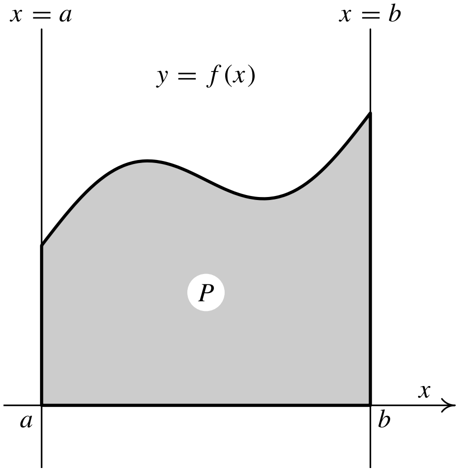
Určitý integrál (Riemannův)

Existuje např. Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův integrál a mnoho dalších – jiné definice, jiné aplikace.

Historie:

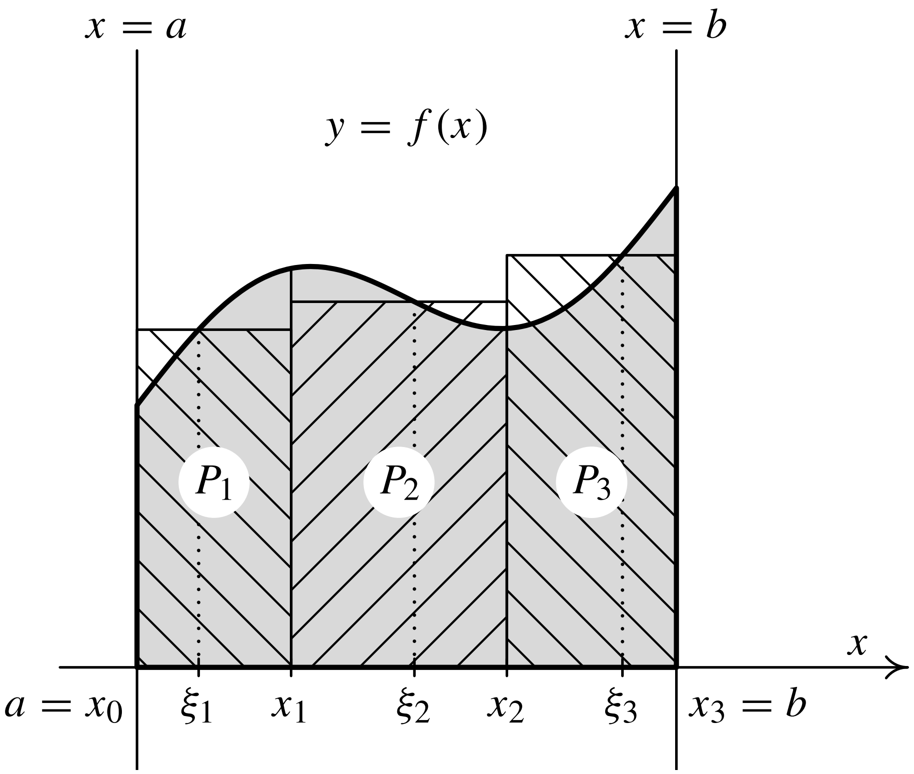
Pokus o kvadraturu paraboly – Archimedes (287-212 př.n.l.)

Úloha: Určete obsah plochy omezené křivkou, osou o_x a přímkami $x = a, x = b$.

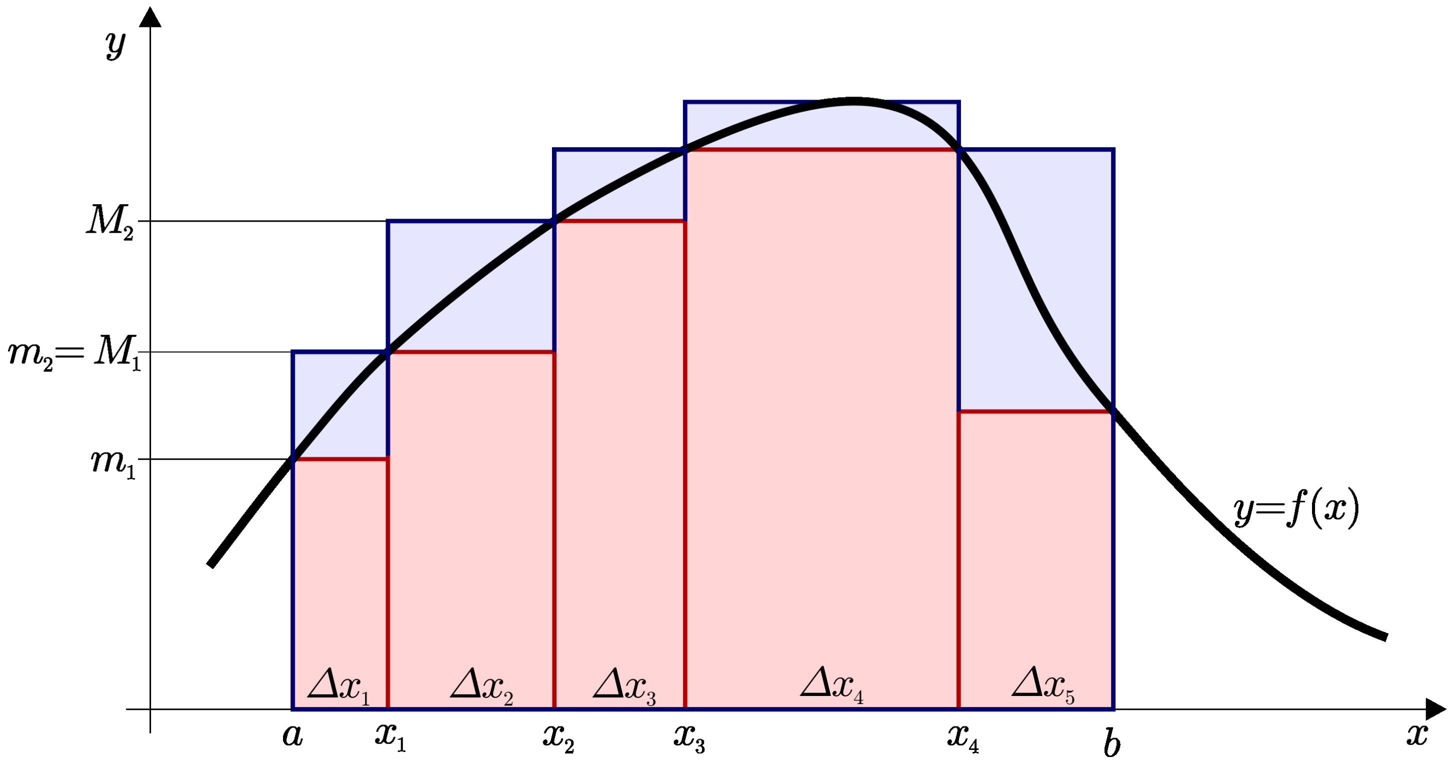


Aproximace plochy:

Přibližné vyjádření plochy. Např. vepsání útvaru do čtvercové jednotkové sítě nebo nahrazení plochy vepsanými a opsanými obdélníky.



Dolní a horní aproximace plochy



Postup od postupné aproximace k výpočtu:

- Dělení intervalu D_n:
  Umístíme n dělících bodů do intervalu $\langle a, b\rangle$. Vzniknou podintervaly $\langle x_{i-1},\ x_i\rangle$ o délkách $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

- Norma dělení $\nu(D_n) = \max\{\Delta x_i\}$ pro $1 \leq i \leq n$ tj. normou je délka nejdelšího dělícího intervalu.

- Zavedeme dolní integrální součet $s(D_n, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

- Zavedeme horní integrální součet $S(D_n, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$.

- Zavedeme integrální součet $\sigma(D_n, f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i$
  Jedná se o integrální součet, příslušný náhodnému výběru reprezentantů ξ_i jednotlivých podintervalů.

- Hodnoty s, σ a S závisí na D_n a na charakteru funkce f.

- Nyní pojďme „zjemňovat“ dělení tak, že postupně $n \to \infty$ tj. $\nu(D_n) \to 0$.

- Posloupnost $s(D_n, f)$ je rostoucí a shora omezená, posloupnost $S(D_n, f)$ je naopak klesající a zdola omezená.

- Platí $s(D_n, f) \leq \sigma(D_n, f) \leq S(D_n, f)$.

- **Existuje právě jedno číslo I, pro nějž platí, že pro všechna dělení D_n intervalu $\langle a, b \rangle$ je:**

$$s(D_n, f) \leq I \leq S(D_n, f)$$

Číslo I se nazývá **určitý integrál** od a (dolní mez) do b (horní mez) z funkce f a označujeme jej:

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$$

Platí tedy:

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(D_n,f) = \lim_{n\to\infty} S(D_n,f) = \lim_{n\to\infty} \sigma(D_n,f)$$

DEF. Konečnou limitu $I = \lim_{n\to\infty} \sigma(D_n,f)$ integrálního součtu $\sigma(D_n,f)$ pro $n \to \infty$ tj. $\nu(D_n) \to 0$, nazýváme **určitý integrál** funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$. Funkci f nazýváme integrovatelnou funkcí (integrace schopnou).

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$\langle a, b\rangle$ – integrační obor

a – dolní mez určitého integrálu

b – horní mez určitého integrálu

$f(x)$ – integrand (integrovaná funkce)

x – integrační proměnná (vyjadřuje ji diferenciál $\mathrm{d}x$).

POZNÁMKY:

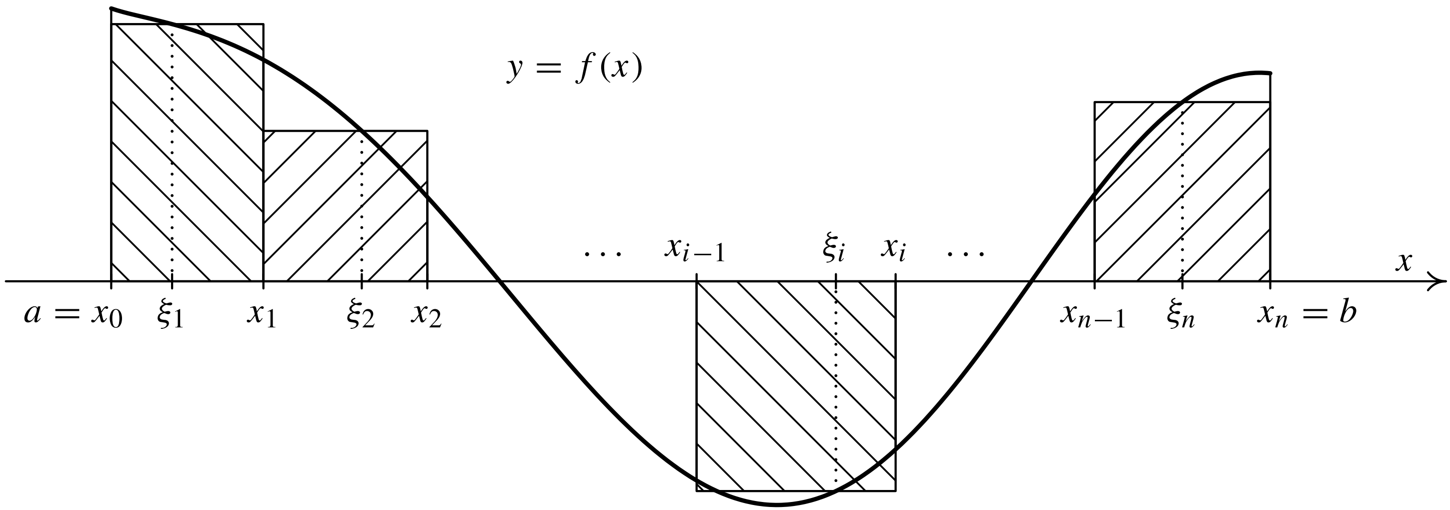
- Pokud číslo I z předchozí definice existuje, je jediné tzn. určitý integrál je definován jednoznačně.
- Integrál z definice se nazývá **Riemannův**. Tento integrál však nemá zcela ideální vlastnosti. Pro teoretičtější úvahy jsou vhodnější obecnější, ale složitější konstrukce. Největší význam má tzv. **Lebesgueův integrál**. Nejobecnější je asi tzv. **Henstockův-Kurzweilův integrál**. *Pro běžné potřeby inženýrské praxe je Riemannův integrál dostačující.*
- Symbol $\int$ – vznikl z písmene S – tj. SUMA
- Přes podobné označení se neurčitý a určitý integrál zásadně liší (množina funkcí x číslo)!
- Diferenciál $\mathrm{d}x$ v určitém integrálu říká, co je nezávisle proměnná! Označení nezávisle proměnné písmenem x není podstatné. Je totiž $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ atd.

Vlastnosti určitého integrálu

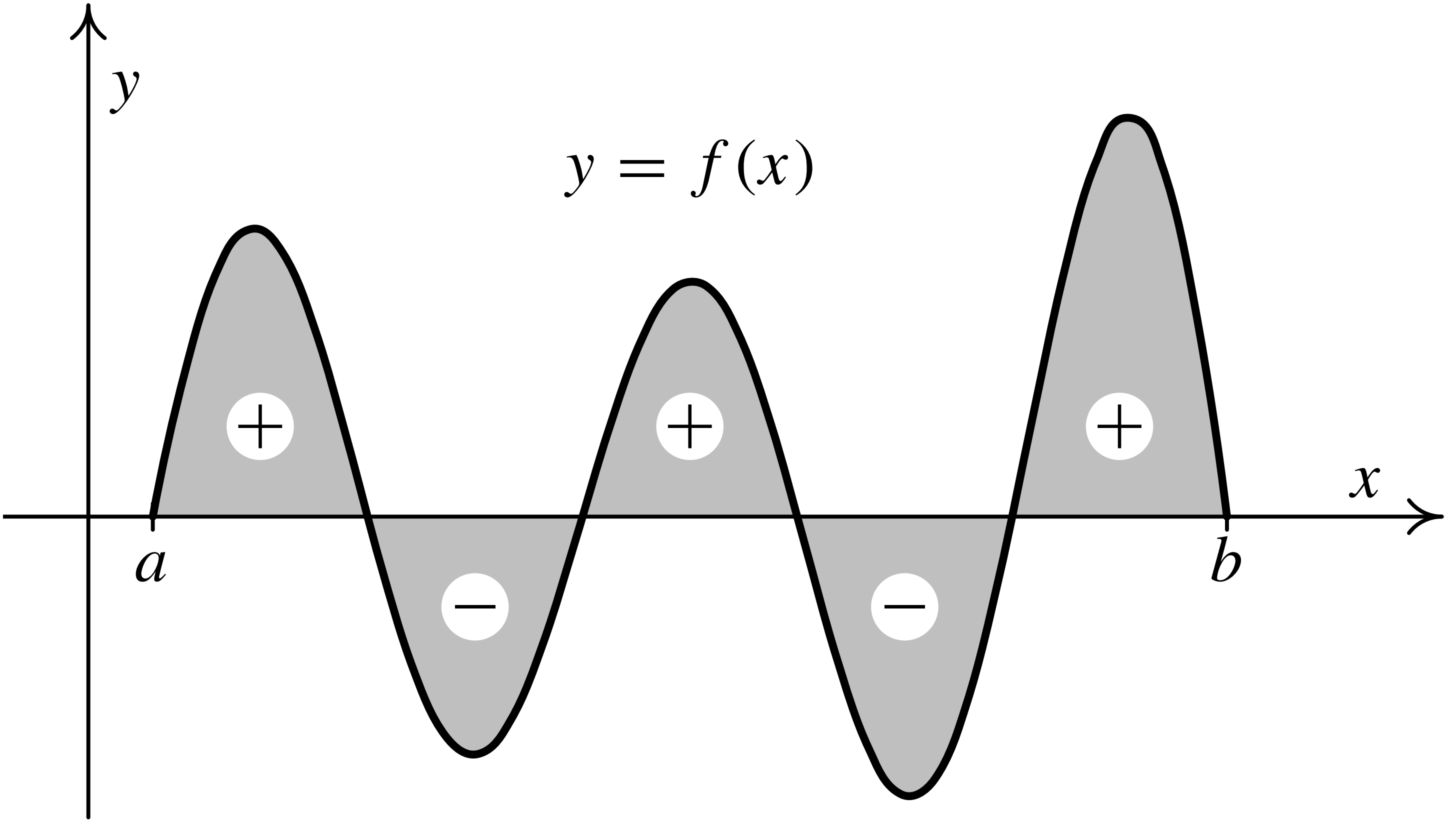
Jestliže jsou na intervalu $\langle a, b \rangle$ funkce f a g integrovatelné, pak na tomto intervalu pro $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ platí:

- $$\int_a^b \left(k_1 \cdot f(x) \pm k_2 \cdot g(x)\right) \, \mathrm{d}x = k_1 \cdot \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \pm k_2 \cdot \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x .$$
- $$\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$$
- $$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x \text{ pro } a \leq c \leq b .$$
- $$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x) \, \mathrm{d}x .$$
- Je-li $f(x) \geq 0$ v intervalu $\langle a, b \rangle$ pak $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \geq 0$.

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$



Určitý integrál vs obsah plochy omezené grafem



Newton-Leibnitzova věta

Praktický výpočet určitého integrálu

Je-li f integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a F je její primitivní funkce, pak platí, že:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = \lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = \lim_{n\to\infty} \sigma(D_n, f)$$

Příklad:

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

POZOR na zadání úloh!

Vypočítejte určitý integrál x *Určete obsah plochy* – různé úlohy!!!

Příklad:

Sestrojte graf funkce $f\colon y = \sin x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Vypočítejte nyní určitý integrál $\int\limits_0^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x$ a následně určete obsah plochy, kterou omezuje graf funkce a osa o_x. Porovnejte oba výsledky.

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora