INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Integrace racionálních lomených funkcí s nerozložitelným jmenovatelem
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0308
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	16.1.2014
Datum ověření ve výuce:	12.2.2014
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Zvládne integrovat racionálně lomené výrazy s nerozložitelným jmenovatelem pomoci rozkladu na součet parciálních zlomků.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o integračních metodách. Může být použit k získání klasifikace.

Integrace racionálních lomených funkcí s nerozložitelným jmenovatelem

V případě, že součástí skupiny parciálních zlomků jsou zlomky s nerozložitelným kvadratickým trojčlenem je situace o něco málo obtížnější než jsme si ukázali v minulém pracovním listu, nicméně je v našich možnostech některé z integrálů vypočítat.

Tento případ vede na integrály dvou typů:

$$\boxed{\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x =} \qquad \text{budeme umět integrovat} \tag{1}$$

$$\boxed{\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}\,\mathrm{d}x =} \qquad \text{neumíme integrovat, lze nalézt v tabulkách integrálů} \tag{2}$$

Postup při integraci:

- Přesvědčíme se, že zadaná integrovaná funkce je či není ryze lomená a v závislosti na tom si ji někde bokem rozložíme buď jen na potřebný počet parciálních zlomků resp. na součet polynomu a parciálních zlomků.
- Samostatně integrujeme jednotlivé parciální zlomky. Zapíšeme výsledek a podmínky integrovatelnosti funkce.

Příklad 1: Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{5x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x =$

Řešení. Trojčlen $x^2 + x + 1$ ve jmenovateli má diskriminant $1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$, který je záporný, takže jeho kořeny jsou komplexní. Jde tudíž o parciální zlomek druhého typu. Derivace jmenovatele je $2x + 1$. Čitatel $5x + 1$ proto upravíme na tvar $r(2x + 1) + s$. Musí tedy platit

$$5x + 1 = r(2x + 1) + s = 2rx + (r + s) \qquad \Rightarrow \qquad 5 = 2r, \ 1 = r + s.$$

To znamená, že $r = 5/2$ a $s = -3/2$. Zadání bude mít po rozdělení tvar

$$\frac{5x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{\frac{5}{2}(2x + 1) - \frac{3}{2}}{x^2 + x + 1} = \frac{5}{2} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1},$$

a tedy

$$\int \frac{5x + 1}{x^2 + x + 1} \, \mathrm{d}x = \frac{5}{2} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \, \mathrm{d}x - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} \, \mathrm{d}x.$$

První ze vzniklých integrálů je snadný (v čitateli je derivace jmenovatele):

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \, \mathrm{d}x = \ln(x^2 + x + 1).$$

Před výpočtem druhého integrálu doplníme trojčlen $x^2 + x + 1$ na úplný čtverec:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Upravíme, zavedeme substituci a dopočítáme celkový výsledek:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x + 1}{x^2 + x + 1} \, \mathrm{d}x &= \frac{5}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c = \\ &= \frac{5}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c. \end{aligned}$$

Příklad 2: Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5 - x^3} =$

Řešení. Jde o racionální ryze lomenou funkci, protože $\mathrm{st}(1) = 0 < \mathrm{st}(x^5 - x^3) = 5$. Jmenovatel snadno rozložíme na součin kořenových činitelů. Platí: $x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1) = x^3(x-1)(x+1)$. Všechny kořeny jsou reálné: trojnásobný kořen 0, jemuž odpovídá trojčlenný řetězec parciálních zlomků, a jednoduché kořeny 1 a -1, jimž odpovídají jednočlenné řetězce parciálních zlomků. Předpokládaný tvar rozkladu je tudíž

$$\frac{1}{x^5 - x^3} = \frac{1}{x^3(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}\,.$$

Abychom určili neznámé konstanty A, B, C, D, E, vynásobíme předchozí rovnost jmenovatelem $x^3(x-1)(x+1)$. Dostaneme

$$1 = A(x^2 - 1) + Bx(x^2 - 1) + Cx^2(x^2 - 1) + Dx^3(x+1) + Ex^3(x-1).$$

$$\begin{array}{llll} x = 0: & 1 = -A & \Rightarrow & A = -1, \\ x = 1: & 1 = 2D & \Rightarrow & D = 1/2, \\ x = -1: & 1 = 2E & \Rightarrow & E = 1/2. \end{array}$$

$$1 = (C + D + E)x^4 + (B + D - E)x^3 + (A - C)x^2 - Bx - A.$$

$$\begin{array}{llll} x^1: & 0 = -B & \Rightarrow & B = 0, \\ x^2: & 0 = A - C & \Rightarrow & C = -1. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^5 - x^3}\,\mathrm{d}x &= \int \left(-\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} \right) \mathrm{d}x = \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \\ &= \frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c. \end{aligned}$$

Podle předchozího návodu vypočítejte neurčité integrály následujících racionálních lomených funkcí:

Úloha 1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^3} =$

Úloha 2. $\int \frac{x^6+16}{x^4-4}\,\mathrm{d}x =$

Úloha 3. $\int \frac{5x^6-x^5+24x^2-9x+9}{x^3\cdot(x^2+3)^2}\,\mathrm{d}x =$

Výsledky úloh

1. $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$

2. $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+c$

3. $2\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}\ln(x^2+3)+\frac{11+x}{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+c$

Použité materiály a zdroje

- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora