INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Integrace racionálních lomených funkcí s rozložitelným jmenovatelem
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0307
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	16.1.2014
Datum ověření ve výuce:	10.2.2014
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Zvládne integrovat racionálně lomené výrazy s rozložitelným jmenovatelem pomoci rozkladu na součet parciálních zlomků.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o integračních metodách. Může být použit k získání klasifikace.

Integrace racionálních lomených funkcí s rozložitelným jmenovatelem

Po rozkladu integrovaného racionálního lomeného výrazu na součet parciálních zlomků (v případě ryze lomeného výrazu) resp. na součet polynomu a parciálních zlomků (v případě neryze lomeného výrazu) je integrace již poměrně snadná.
Vzhledem k tomu, že polynom umíme jednoduše vždy zintegrovat, pojďme se v tuto chvíli zabývat pouze případem integrování ryze lomeného výrazu tj.

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,\mathrm{d}x, \quad n < m$$

V minulé hodině jsme poznali dva typy parciálních zlomků. Na tomto pracovním listě se budeme zabývat případem, kdy jmenovatel racionální lomené funkce půjde rozložit až na součin lineárních dvojčlenů a neobjevuje se v něm nerozložitelný kvadratický trojčlen. Tento případ si ponecháme napříště.

Tento speciální případ vede na integrály dvou typů:
Oba typy umíme již integrovat (zákl. vzorec resp. substituční met.):

$$\boxed{\int \frac{A}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x = A \cdot \int \frac{1}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x = A \cdot \ln|x-\alpha| + c} \tag{1}$$

$$\boxed{\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,\mathrm{d}x = A \cdot \int (x-\alpha)^{-k}\,\mathrm{d}x = A \cdot \frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} + c} \tag{2}$$

Postup při integraci:

- Přesvědčíme se, že zadaná integrovaná funkce je či není ryze lomená a v závislosti na tom si ji někde bokem rozložíme buď jen na potřebný počet parciálních zlomků resp. na součet polynomu a parciálních zlomků.
- Samostatně integrujeme jednotlivé parciální zlomky. Zapíšeme výsledek a podmínky integrovatelnosti funkce.

Příklad 1: Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{3x+16}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x =$

Řešení. Jde o racionální funkci, která je ryze lomená, protože platí $\operatorname{st}(3x+16) = 1 < < \operatorname{st}(x^2 - x - 6) = 2$. Rozložíme ji na parciální zlomky. K tomu potřebujeme kořeny jmenovatele:

$$x^2 - x - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2, \\ \ \ 3. \end{cases}$$

Platí tedy $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. Oba kořeny jsou reálné a jednoduché. Ke každému kořenu tudíž přísluší jednočlenný řetězec parciálních zlomků. Tvar rozkladu je

$$\frac{3x+16}{x^2 - x - 6} = \frac{3x+16}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2},$$

kde A a B jsou vhodné konstanty. Rovnost vynásobíme jmenovatelem $(x-3)(x+2)$ a dostaneme rovnost dvou mnohočlenů:

$$3x + 16 = A(x+2) + B(x-3).$$

Pro určení konstant A a B je nyní nejrychlejší do rovnosti dosadit postupně oba kořeny. Vyjde:

$$\begin{aligned} x &= -2: & 10 &= -5B & \Rightarrow \quad & B = -2, \\ x &= 3: & 25 &= 5A & \Rightarrow \quad & A = 5. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme vypočítat integrál. Dostaneme:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+16}{x^2 - x - 6}\, dx &= \int \left(\frac{5}{x-3} - \frac{2}{x+2} \right) dx = \\ &= 5 \int \frac{dx}{x-3} - 2 \int \frac{dx}{x+2} = 5 \ln|x-3| - 2 \ln|x+2| + c. \end{aligned}$$

Výsledek platí na kterémkoli z intervalů $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ a $(3, +\infty)$. ▲

Příklad 2: Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{x^5 - x^3} =$

Řešení. Jde o racionální ryze lomenou funkci, protože $\mathrm{st}(1) = 0 < \mathrm{st}(x^5 - x^3) = 5$. Jmenovatel snadno rozložíme na součin kořenových činitelů. Platí: $x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1) = x^3(x - 1)(x + 1)$. Všechny kořeny jsou reálné: trojnásobný kořen 0, jemuž odpovídá trojčlenný řetězec parciálních zlomků, a jednoduché kořeny 1 a -1, jimž odpovídají jednočlenné řetězce parciálních zlomků. Předpokládaný tvar rozkladu je tudíž

$$\frac{1}{x^5 - x^3} = \frac{1}{x^3(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}\,.$$

Abychom určili neznámé konstanty A, B, C, D, E, vynásobíme předchozí rovnost jmenovatelem $x^3(x - 1)(x + 1)$. Dostaneme

$$1 = A(x^2 - 1) + Bx(x^2 - 1) + Cx^2(x^2 - 1) + Dx^3(x + 1) + Ex^3(x - 1).$$

$$\begin{array}{llll} x = 0: & 1 = -A & \Rightarrow & A = -1, \\ x = 1: & 1 = 2D & \Rightarrow & D = 1/2, \\ x = -1: & 1 = 2E & \Rightarrow & E = 1/2. \end{array}$$

$$1 = (C + D + E)x^4 + (B + D - E)x^3 + (A - C)x^2 - Bx - A.$$

$$\begin{array}{llll} x^1: & 0 = -B & \Rightarrow & B = 0, \\ x^2: & 0 = A - C & \Rightarrow & C = -1. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^5 - x^3}\,\mathrm{d}x &= \int \left(-\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} \right) \mathrm{d}x = \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \\ &= \frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x - 1| + \frac{1}{2}\ln|x + 1| + c. \end{aligned}$$

Podle předchozích návodů vypočítejte neurčité integrály následujících racionálních lomených funkcí :

Úloha 1. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$

Úloha 2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x-2)} =$

Výsledky úloh

1. $\frac{1}{2}\ln|x-1| - 4\ln|x-2| + \frac{9}{2}\ln|x-3| + c$
2. $\frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$

Použité materiály a zdroje

- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora