INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Rozklad na parciální zlomky
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0306
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	15.1.2014
Datum ověření ve výuce:	10.2.2014
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Zvládne rozložit racionálně lomené výrazy na součet parciálních zlomků.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o integračních metodách. Může být použit k získání klasifikace.

Rozklad na parciální zlomky

Při integrování je potřeba často racionální lomený výraz rozložit na součet jednodušších lomených výrazů, které následně budeme umět integrovat. Tomuto postupu se říká **rozklad na parciální zlomky** (částečné zlomky).

Známe:

a) Racionální lomená funkce je podíl dvou mnohočlenů $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.
Čísla n a m označují *stupně polynomů* $P_n(x)$ a $Q_m(x)$.

b) Racionální lomená funkce $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je **ryze lomená** je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele tj. $n < m$.
Je-li naopak $n > m$, hovoříme o **neryze lomené** funkci.

c) Každou neryze lomenou racionální funkci lze dělením převést na součet mnohočlenu a ryze lomené racionální funkce (dělení polynomů).

d) Stupeň polynomu $P_n(x)$ budeme značit symbolem $st(P)$ čili $st\,(P_n(x)) = n$.

Parciální zlomky jsou speciální racionální lomené funkce. Rozlišujeme dva typy parciálních zlomků (jsou vždy ryze lomené):

$$\boxed{\frac{A}{(x-\alpha)^k}} \qquad \boxed{\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}}$$

kde $k \in \mathbb{N},\ \alpha, A, M, N, p, q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0$

Pro naši další práci je nezbytná tato důležitá věta:

Nechť $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je racionální **ryze lomená** funkce s reálnými koeficienty. Dále nechť rozklad jmenovatele $Q(x)$ na ireducibilní (nerozložitelné) činitele v reálném oboru má tvar:

$Q(x) = a \cdot (x-\alpha_1)^{k_1} \ldots (x-\alpha_r)^{k_r} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \ldots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s}$.

Potom funkci $R(x)$ lze napsat jako součet parciálních zlomků, přičemž k-násobnému reálnému kořenu jmenovatele α odpovídá k parciálních zlomků tvaru:

$\frac{A_1}{x-\alpha}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \ldots, \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$

a l-násobné dvojici komplexně sdružených kořenů jmenovatele, přislušejících kvadratickému trojčlenu $x^2 + px + q$ odpovídá l parciálních zlomků tvaru:

$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}, \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}, \ldots, \frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l}$.

Pokud není funkce $R(x)$ ryze lomená (což je velmi podstatný předpoklad), je třeba ji nejprve převést na součet mnohočlenu a racionální ryze lomené funkce vydělením polynomů $P(x) : Q(x)$, a tu pak lze teprve rozkládat!

Úloha:

Promyslete, jaké vztahy musí platit mezi stupni polynomů m, n a koeficienty $k_1, k_2, \ldots, k_r,\ l_1, l_2, \ldots, l_s$.

Pozn.

Rozklad na parciální zlomky je vlastně jakýmsi opačným procesem k převodu na společného jmenovatele:

$$\frac{3}{x+5}+\frac{7}{x-2}=\frac{3\cdot(x-2)+7\cdot(x+5)}{(x+5)\cdot(x-2)}=\frac{10x+29}{x^2+3x-10}$$

obráceně:

$$\frac{10x+29}{x^2+3x-10}=\frac{10x+29}{(x+5)\cdot(x-2)}=\dots\text{ atd.}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x-2}=\frac{3}{x+5}+\frac{7}{x-2}$$

Postup nalezení koeficientů rozkladu:

- Přesvědčíme se, že zadaná funkce je ryze lomená!!! Pokud tomu tak není, převedeme na součet mnohočlenu a racionální ryze lomené funkce. Tu pak teprve rozkládáme.
- Rozložíme jmenovatel na součin ireducibilních činitelů (tj. součin lineárních dvojčlenů a kvadratických trojčlenů se záporným diskriminantem) v reálném oboru.
- Podle rozkladu napíšeme předpokládaný tvar součtu parciálních zlomků s neznámými koeficienty. Ten položíme roven zadané racionální ryze lomené funkci, jejíž jmenovatel si napíšeme ve tvaru součinu.
- Vzniklou rovnici vynásobíme jmenovatelem zadání. Dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.
- Dva mnohočleny se rovnají právě tehdy, když jsou stejného stupně a u stejných mocnin neznámé mají tytéž koeficienty. Roznásobíme tedy mnohočleny na obou stranách a sloučíme členy se stejnými mocninami neznámé. Pak porovnáme koeficienty u stejných mocnin neznámé na levé a pravé straně rovnice. Soustava lineárních rovnic (řešíme soustavu lineárních rovnic).
- Jestliže má jmenovatel reálné kořeny, je výhodné dosadit je do vzniklé rovnice ještě před roznásobením. Všechny členy s neznámými koeficienty až na jeden totiž vymizí.
- Jinou metodou nalezení koeficientů je do vzniklé rovnice dosadit libovolných $n+1$ různých čísel, kde n je nejvyšší mocnina neznámé, která se v rovnici vyskytuje. Dostaneme opět soustavu lineárních rovnic, která má jediné řešení.

Podle předchozího návodu rozložte racionální lomené funkce na parciální zlomky:

Příklad 1: Rozložte na parciální zlomky funkci $R(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

Řešení. Funkce je ryze lomená, takže není třeba dělit. Rozklad jmenovatele je $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Jmenovatel má tedy jednoduché kořeny -1 a 1, kterým odpovídají jednočlenné řetězce parciálních zlomků prvního typu. Tvar rozkladu bude

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}\,.$$

Po vynásobení jmenovatelem $(x+1)(x-1)$ obdržíme rovnici

$$x = A(x-1) + B(x+1).$$

Dosadíme postupně oba reálné kořeny. Vyjde:

$$\begin{aligned} x &= -1 && \Longrightarrow && -1 = -2A && \Longrightarrow && A = \frac{1}{2}\,, \\ x &= 1 && \Longrightarrow && 1 = 2B && \Longrightarrow && B = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Rozklad tedy je

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,.$$

Příklad 2: Rozložte na parciální zlomky funkci $R(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^4 + x^2}$.

Řešení. Funkce je ryze lomená, takže není třeba dělit. Rozklad jmenovatele je zřejmě $x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$. Jmenovatel má tedy dvojnásobný kořen 0 a dvojici jednoduchých komplexně sdružených kořenů i a $-$i, kterým odpovídá mnohočlen $x^2 + 1$. Kořenu 0 odpovídá dvojčlenný řetězec parciálních zlomků prvního typu, mnohočlenu x^2+1 odpovídá jednočlenný řetězec parciálních zlomků druhého typu. Tvar rozkladu bude

$$\frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1}\,.$$

Po vynásobení jmenovatelem $x^2(x^2 + 1)$ obdržíme rovnici

$$2x^3 - x^2 + x - 2 = Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2.$$

Pravou stranu roznásobíme a sečteme. Vyjde:

$$2x^3 - x^2 + x - 2 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B.$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a pravé straně rovnice.

$$\begin{array}{lrcl@{\qquad\qquad}lrcl}
x^3: & 2 &=& A + C, & x: & 1 &=& A,\\
x^2: & -1 &=& B + D, & x^0: & -2 &=& B.
\end{array}$$

Je tedy $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$ a $D = 1$. Rozklad pak je

$$\frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^4 + x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{x + 1}{x^2+1}\,.$$

▲

Příklad 3: Rozložte na parciální zlomky funkci $R(x) = \frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x-2}$.

Řešení. Funkce není ryze lomená, takže je ji třeba nejprve vydělit. Podíl vyjde 1 a zbytek $3x^2 - x + 6$, což zapíšeme takto:

$$R(x) = 1 + \frac{3x^2 - x + 6}{x^3 + x - 2}.$$

Nyní musíme rozložit jmenovatel, tj. najít kořeny rovnice $x^3 + x - 2 = 0$. Je zřejmé, že číslo 1 je kořenem této rovnice. Platí tedy $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2)$. Protože kvadratický trojčlen $x^2 + x + 2$ má komplexní kořeny (diskriminant je $D = -7 < 0$), je to již rozklad na ireducibilní činitele v reálném oboru. Jednoduchému kořenu 1 odpovídá parciální zlomek prvního typu, trojčlenu $x^2 + x + 2$ parciální zlomek druhého typu. Tvar rozkladu bude

$$\frac{3x^2 - x + 6}{(x - 1)(x^2 + x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 2}.$$

Po vynásobení dostaneme rovnici

$$3x^2 - x + 6 = A(x^2 + x + 2) + (Bx + C)(x - 1).$$

Dosadíme reálný kořen $x = 1$. Vyjde nám $8 = 4A$, tj. $A = 2$. Pro zbývající dvě čísla dostaneme rovnice porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na levé a pravé straně rovnice. Po roznásobení a sloučení členů se stejnými mocninami neznámé obdržíme

$$3x^2 - x + 6 = (A + B)x^2 + (A - B + C)x + 2A - C.$$

Vybereme libovolně dvě rovnice obsahující B a C.

$$x^2 : \quad 3 = A + B, \qquad\qquad x^0 : \quad 6 = 2A - C.$$

Tedy $B = 1$ a $C = -2$. Rozklad má tvar

$$\frac{3x^2 - x + 6}{x^3 + x - 2} = \frac{2}{x - 1} + \frac{x - 2}{x^2 + x + 2}.$$

Pro zadanou neryze lomenou racionální funkci tedy vyjde

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + x - 2} = 1 + \frac{2}{x - 1} + \frac{x - 2}{x^2 + x + 2}.$$

▲

Použité materiály a zdroje

- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora