INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Metoda per partes
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0305
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	8.1.2014
Datum ověření ve výuce:	27.1.2014
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě předložených vztahů zvládne integrovat funkce metodou per partes.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o integrálech. Může být použit k získání klasifikace.

Neurčitý integrál – metoda per partes (tj. po částech)

Podstata metody:

Metoda plyne z pravidla o derivování součinu dvou funkcí. Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ – zkráceně u a v v nějakém intervalu spojité derivace, platí pro derivaci součinu funkcí vzorec $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Integrací této rovnice dostaneme:

$$\int (u \cdot v)' \, dx = \int u' \cdot v \, dx + \int u \cdot v' \, dx$$

a odtud získáme vzorec, který předpisuje postup při integrování metou per partes:

$$\boxed{\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx}$$

Postup:

1) Integrovanou funkci rozložíme na součin tak, aby se integrál funkce dal poměrně snadno určit (nejlépe ze základních integrálů).
2) Určíme, kterou funkci považujeme za u' a kterou za v.
3) Funkci označenou jako u' integrujeme (musíme to umět), funkci označenou jako v zderivujeme.
4) Dosadíme do vzorce.
5) Metoda je úspěšná, je-li integrál na pravé straně jednodušší než integrál na straně levé. Někdy je třeba postup i několikrát opakovat.
6) Pokud se při výpočtu „zacyklíme“ tj. dostaneme se do integrálu stejné funkce, sestavíme rovnici z níž integrál vyjádříme.

Příklad 1: Vypočtěte neurčitý integrál $\int x \sin x \, dx =$

Řešení:

$$\int x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx =$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

Příklad 2: Vypočtěte neurčitý integrál $\int (2x-1)\ln x \, dx =$

Řešení:

$$\int (2x-1)\ln x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 2x - 1 & v = x^2 - x \end{array} \right| =$$

$$= (\ln x)(x^2 - x) - \int \frac{1}{x}(x^2 - x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= (x^2 - x)\ln x - \int (x-1)\,\mathrm{d}x = (x^2 - x)\ln x - \frac{1}{2}x^2 + x + c. \qquad \blacktriangle$$

Příklad 3: Vypočtěte neurčitý integrál $\int (x^2+1)e^{-x} \, dx =$

Řešení:

$$\int (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & u' = 2x \\ v' = \mathrm{e}^{-x} & v = -\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right| =$$

$$= (x^2+1)(-\mathrm{e}^{-x}) - \int 2x(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x =$$

$$= -(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^{-x} & v = -\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right| =$$

$$= -(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x} + 2\Big[x(-\mathrm{e}^{-x}) - \int 1\cdot(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x\Big] =$$

$$= -(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x} + 2\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + c = -(x^2 + 2x + 3)\,\mathrm{e}^{-x} + c. \qquad \blacktriangle$$

Příklad 4: Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{arccotg} x \, dx =$

$$\int \operatorname{arccotg} x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arccotg} x & u' = -\frac{1}{x^2+1} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| =$$

$$= (\operatorname{arccotg} x)x - \int \left(-\frac{1}{x^2+1}\right) x\,\mathrm{d}x = x \operatorname{arccotg} x + \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$$

Příklad 5: Vypočtěte neurčitý integrál $\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x =$

Řešení: Použijeme dvakrát metodu per partes a závěrem vyjádříme integrál z rovnice:
Dostaneme

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \mathrm{e}^x & u' = \mathrm{e}^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^x(-\cos x) - \int \mathrm{e}^x(-\cos x)\, \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \mathrm{e}^x & u' = \mathrm{e}^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Dostali jsme tedy rovnici

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x,$$

z níž již snadno vypočítáme, že

$$2\int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x + c,$$

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + c.$$

Podle předchozích návodů vypočítejte metodou per partes neurčité integrály:

Úloha 1. $\int \cos^2 \, \mathrm{d}x =$ (řešete i substituční metodou)

Úloha 2. $\int x \cos x \, \mathrm{d}x =$

Úloha 3. $\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x =$

Úloha 4. $\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x =$

Úloha 5. $\int x \ln x \, \mathrm{d}x =$

Úloha 6. $\int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x =$

Výsledky úloh

1. $\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2} + c$
2. $x\sin x + \cos x + c$
3. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + c$
4. $x^2\sin x - 2\sin x + 2x\cos x + c$
5. $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4} + c$
6. $\frac{1}{2}\ln^2 x + c$

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: `<http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>`.
- Archiv autora