Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Substituční metoda
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0302
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	5.1.2014
Datum ověření ve výuce:	22.1.2014
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě předložených vztahů zvládne integrovat funkce substituční metodou.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o integrálech. Může být použit k získání klasifikace.

Neurčitý integrál – substituční metoda

Podstata metody:

Daný integrál převádíme zavedením nové proměnné na integrál funkce, kterou lze snadněji integrovat. Poté, co vyřešíme integrál, ve výsledku vrátíme původní proměnnou. Vztah mezi původní proměnnou a novou proměnnou je dán substituční rovnicí. V ní je nová proměnná funkcí původní proměnné. Je také potřeba je vyjádřit vztahy mezi původním a novým diferenciálem. Metodu používáme k řešení integrálů, v nichž se integrovaná funkce dá rozložit na součin dvou činitelů, přičemž prvním činitelem je nějaká složená funkce a druhým činitelem je derivace této složené funkce. Jednoduše to lze provést zejména při substitucích lineární funkce, jakožto složky nějaké složené funkce. Princip metody vyplývá z derivace složené funkce. Připomeňme, že platí:

$$F^{'}\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x) = \left[F\left(\varphi(x)\right)\right]^{'} \qquad \text{– vztah pro derivaci složené funkce}$$

Označme $u = \varphi(x)$ a $F'(u) = f(u)$ a integrujeme obě strany rovnosti:

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F\left[\varphi(x)\right] + c$$

Odtud po zavedení substituce a diferencování rovnosti $u = \varphi(x)$ obdržíme:

$$\boxed{\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} \varphi(x) &= u \\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}u + c}$$

Příklad 1: Vypočtěte neurčitý integrál $\int (4-7x)^{10}\,\mathrm{d}x =$

Řešení:

$$\int (4-7x)^{10}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} 4-7x &= u \\ -7\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}x &= -\frac{1}{7}\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int u^{10}\left(-\frac{1}{7}\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{7}\int u^{10}\,\mathrm{d}u =$$

$$= -\frac{1}{7}\,\frac{u^{11}}{11} + c = -\frac{1}{77}\,(4-7x)^{11} + c. \qquad \blacktriangle$$

Příklad 2: Vypočtěte neurčitý integrál $\int \sqrt{2x-5}\,\mathrm{d}x =$

Řešení. Opět použijeme lineární substituci $u = 2x - 5$. Vyjde

$$\int \sqrt{2x-5}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} 2x-5 &= u \\ 2\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}\sqrt{u^3} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-5)^3} + c. \qquad \blacktriangle$$

Příklad 3: Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{(1+\ln x)^4}{x}\,\mathrm{d}x =$

Řešení:

$$\int \frac{(1+\ln x)^4}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} 1+\ln x = u \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int u^4\,\mathrm{d}u = \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{(1+\ln x)^5}{5} + c.$$

O správnosti výpočtu se snadno můžeme přesvědčit derivací. ▲

Příklad 4: Vypočtěte neurčitý integrál $\int \sin x \cos^5 x\,\mathrm{d}x =$

Řešení. Zde se nabízí složená funkce $\cos^5 x$ s vnitřní složkou $\cos x$. Její derivace je $-\sin x$, což je výraz, který v integrandu až na násobek -1 máme. Tedy

$$\int \sin x \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \cos x = u \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int u^5(-1)\,\mathrm{d}u = -\frac{u^6}{6} + c = -\frac{\cos^6 x}{6}.$$

Bylo jen třeba uvědomit si, že $\sin x \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \cos^5 x \sin x\,\mathrm{d}x$. ▲

Příklad 5: Vypočtěte neurčitý integrál $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$

Řešení:

$$\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} -x^2 = u \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \mathrm{e}^u\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^u + c = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} + c.$$

Podle předchozích návodů vypočítejte substituční metodou neurčité integrály:

Úloha 1. $\int \sin^2\,\mathrm{d}x =$ (návod: využijte vzorce pro $\cos 2x$)

Úloha 2. $\int \cos^2 6x\,\mathrm{d}x =$

Úloha 3. $\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x =$

Úloha 4. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x =$

Úloha 5. $\int 3x(x^2-1)^6\,\mathrm{d}x =$

Úloha 6. $\int x^2\sqrt[3]{x^3-2}\,\mathrm{d}x =$

Úloha 7. $\int \sin x\sqrt{\cos x + \frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}x =$

Výsledky úloh

1. $\frac{1}{2}(x + \sin x) + c$
2. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{24}\sin 12x + c$
3. $\ln|1 + x^3| + c$
4. $-\ln|\cos x| + c$
5. $\frac{3}{14}(x^2 - 1)^7 + c$
6. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3 - 2)^4} + c$
7. $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{(\cos x + \frac{\pi}{2})^3} + c$

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>.
- Archiv autora