evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Primitivní funkce – zavedení pojmu
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0301
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	20.12.2013
Datum ověření ve výuce:	6.1.2014
Druh učebního materiálu:	prezentace
Očekávaný výstup:	Student si dělá poznámky k probíranému tématu a průběžně řeší předkládané úlohy
Metodické poznámky:	Materiál – prezentace – je určen jako osnova výkladu nového učiva resp. pro účely opakování

Primitivní funkce – zavedení pojmu

Jaroslav Hajtmar

20.12.2013

Primitivní funkce, neurčitý integrál

Úloha:

K zadané funkci f hledáme funkci F takovou, aby platilo:

$$F' = f$$

Otázky:

- Jakou funkci F je třeba derivovat, abychom dostali zadanou funkci f?
- Existuje vůbec taková funkce F?
- Může být více takových funkcí?
- Umožní znalost směrnic tečen ke grafu fce najít tuto funkci?
- Jak ke konkrétně zadané elementární funkci f takovou funkci najít?

Derivovat umíme! Zkuste zpaměti najít takové funkce, které by po zderivování daly funkce:

a) $f_1\colon y = \frac{1}{x}$
b) $f_2\colon y = \sin x$
c) $f_3\colon y = x$

Výsledky:

a) např. F_1: $y = \ln x$ $\qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

b) např. F_2: $y = -\cos x$ $\qquad (-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$

c) např. F_3: $y = \frac{x^2}{2}$ $\qquad \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$

Ptáte se proč píšeme slovo **např.**? Zkuste derivovat funkce:

$$\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)' =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - 7\right)' =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + c\right)' = \qquad \text{kde } c \in \mathbb{R}$$

Definice primitivní funkce

DEF. Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I. Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní funkce** k funkci $f(x)$ na I, jestliže platí $F'(x) = f(x),\ \forall x \in I$. Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na I se nazývá **neurčitý integrál** z funkce $f(x)$ a značí se $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Platí tedy:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x);\ F(x) \text{ je primitivní k } f(x) \text{ na } I\}.$$

POZN.

$\int$ – symbol intergrálu (vzniknul z písmene S)

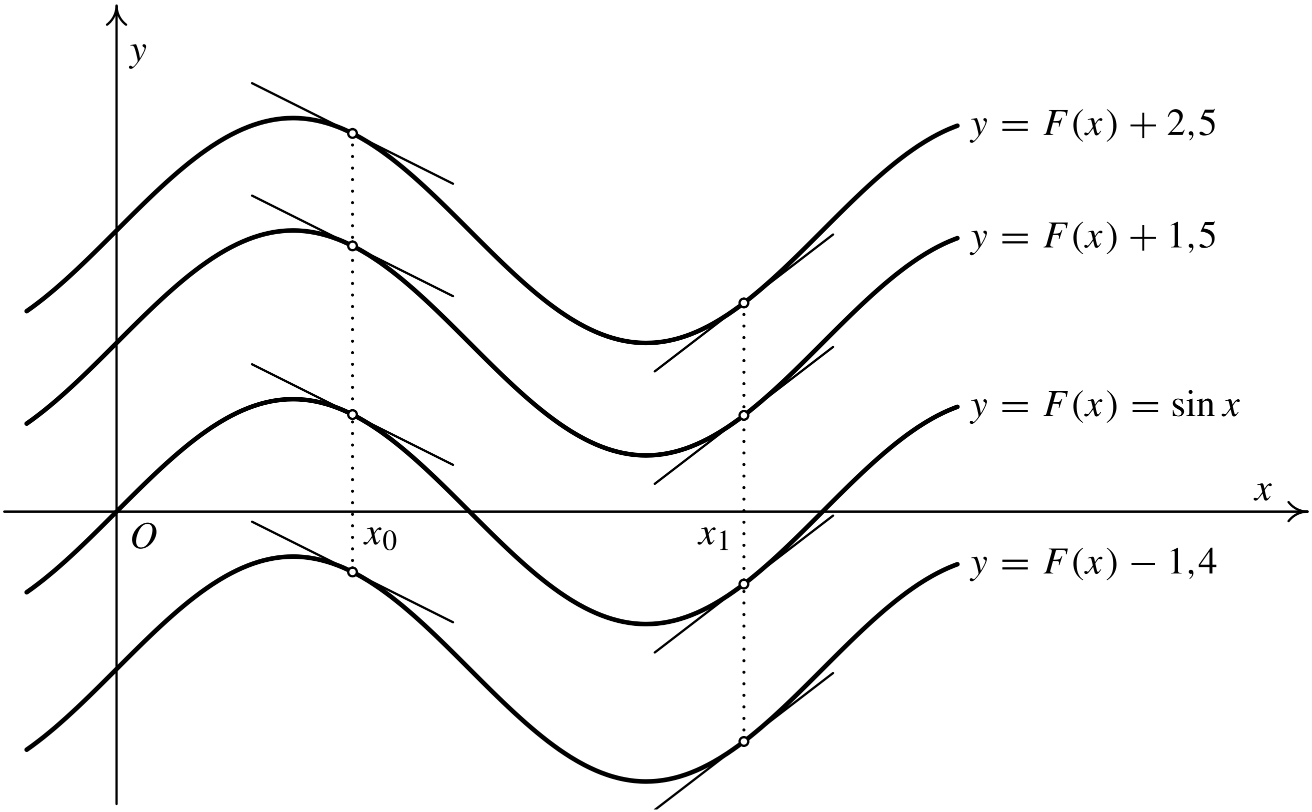
$f(x)$ – tzv *integrand* nebo *integrovaná funkce*

$\mathrm{d}x$ – tzv. diferenciál proměnné x - značí proměnnou podle níž se integruje

Důležité poznámky:

- $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}$ tzv. integrační konstanta.
- Každé dvě primitivní funkce F a G k funkci f se liší o reálnou konstantu tj. $F(x) = G(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}$.
- Ke každé funkci f existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí (grafy jsou oproti sobě vertikálně posunuty o jistou konstantu $c \in \mathbb{R}$).
- Funkce k níž existuje primitivní funkce se nazývá *integrovatelná* resp. *integrabilní*.
- **Funkce spojitá v otevřeném intervalu je integrabilní!**
- Určení (tj. postup výpočtu) primitivní funkce se nazývá *integrování* neboli *integrace*.

Různé primitivní funkce k funkci $y = \cos x$



Tabulka základních integrálů

Pomocí derivování ověřte neurčité integrály elementárních funkcí a zapište podmínky integrovatelnosti:

- $\int 0\,\mathrm{d}x = c$
- $\int \mathrm{d}x = x + c$
- $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$
- $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$
- $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$
- $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$
- $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$
- $\int \frac{-1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{cotg} x + c$
- $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$

Počítání s neurčitými integrály

Jestliže na intervalu I existují integrály $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int g(x)\,\mathrm{d}x$, pak na intervalu I existují také integrály $\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x$ a $\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$, $c \in \mathbb{R}$ a platí:

- $\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$

Přímo z definice navíc plyne:

- $[\int f(x)\,\mathrm{d}x]' = f(x)$
- $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

Metoda přímé integrace

viz Petáková str. 162-163

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora