evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Přehled základních úloh o funkci a jejím grafu
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0219
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	6.12.2013
Datum ověření ve výuce:	18.12.2013
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě vztahů předložených v přehledné tabulce zvládne určit průběh funkce a zakreslit její graf.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o aplikacích limit a derivací.

Přehled základních úloh o funkci a jejím grafu (1. strana)

č.	Úlohy o funkci $y = f(x)$	Řešení úlohy	Úlohy o grafu funkce $y = f(x)$
1.	Definiční obor funkce – $\mathcal{D}(f)$	lomené $y = \frac{g(x)}{h(x)},\ h(x) \neq 0$ iracionální $y = \sqrt[2n]{g(x)},\ g(x) \geq 0$ logaritmické $y = \log_z g(x),\ g(x) > 0$ goniometrické $y = \operatorname{tg} g(x),\ g(x) \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2},\ y = \operatorname{cotg} g(x),\ g(x) \neq k\pi$ cyklometrické $y = \arcsin g(x),\ y = \arccos g(x),\ -1 \leq g(x) \leq 1$	Definiční obor je množina bodů osy o_x pro něž existují body grafu funkce.
2.	Body nespojitosti	odstranitelné – pro $x = a$, v němž funkce není definována a má v něm vlastní limitu. tj. $x \notin \mathcal{D}(f) \wedge \lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$ I. druhu – pro $x = a$, v němž existují obě jednostranné vlastní limity, které jsou však různé tj. $\lim\limits_{x \to a-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+} f(x)$. II. druhu – pro $x = a$, v němž alespoň jedna jednostranná limita neexistuje nebo je nevlastní.	Souřadnice bodů grafu, v nichž je přerušen souvislý průběh grafu.
3.	Hodnoty proměnné x, jež vedou a) k dané funkční hodnodě h b) k nulovým bodům funkce	a) Kořeny rovnice $f(x) = h$ b) Kořeny rovnice $f(x) = 0$	x-ové souřadnice průsečíku grafu a) s přímkou $y = h$ b) s osou o_x
4.	Intervaly proměnné x pro a) kladné funkční hodnoty b) záporné funkční hodnoty	a) Řešení nerovnosti $f(x) > 0$ b) Řešení nerovnosti $f(x) < 0$	Části osy o_x a) nad nimiž jsou body grafu b) pod nimiž jsou body grafu
5.	a) Intervaly růstu b) Intervaly klesání	a) Řešení nerovnosti $f'(x) > 0$ b) Řešení nerovnosti $f'(x) < 0$	Části osy o_x jimž přísluší a) rostoucí část grafu b) klesající část grafu
6.	Lokální extrémy a) lokální maximum b) lokální minimum	1) Pro x, jež splňuje $f'(x) = 0$ a současně a) $f''(x) < 0$ b) $f''(x) > 0$ 2) Pro x, v němž existují různé jednostranné i) vlastní derivace ii) nevlastní derivace	Body, v nichž je tečna $t \parallel o_x$ a) a graf leží pod tečnou b) a graf leží nad tečnou i) „polotečny" se směrnicí $\neq 0$ ii) bod vratu s tečnou $t \parallel o_y$
7.	a) Intervaly konvexnosti b) Intervaly konkávnosti	a) Řešení nerovnosti $f''(x) > 0$ b) Řešení nerovnosti $f''(x) < 0$	a) konvexní část grafu b) konkávní část grafu

Přehled základních úloh o funkci a jejím grafu (2. strana)

č.	Úlohy o grafu funkce $y = f(x)$	Řešení úlohy
8.	Směrnice tečny, rovnice tečny a normály v bodě $[x_0,\ y_0]$	$k_t = f'(x_0)$; t: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$; n: $y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$;
9.	Inflexní body s tečnou t a) rovnoběžnou s o_x a) různoběžnou s o_x	Pro x, jež splňuje: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0$, $f'''(x) \neq 0$ nebo $f'' = f''' \ldots = f^{(k)} = 0 \wedge f^{(k+1)} \neq 0$ pro k-liché celé číslo $f'(x) \neq 0$
10.	Body, jejichž tečny jsou rovnoběžné s o_y a) inflexní body a) tzv. body vratu $\dot{\mathrm{H}}$ a Ḥ	Pro $x = a$, v němž není 1. derivace definována a v němž: a) $\lim\limits_{x \to a\mp} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a\mp} f'(x) = -\infty$; b) $\lim\limits_{x \to a\mp} f'(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to a\mp} f'(x) = \mp\infty$;
11.	Asymptota rovnoběžná s o_x	a_s: $y = A$ když existuje vlastní limita v nevlastním bodě $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ nebo $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$
12.	Asymptota rovnoběžná s o_y	a_s: $x = a$ když funkce f není v bodě a definována a když současně existuje alespoň jedna jednostranná nevlastní limita ve vlastním bodě a tj. když $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$
13.	Asymptota různoběžná s o_x i s o_y	a_s: $x = k \cdot x + q$ když konstanty $k, q \in \mathbb{R}$ jsou určeny limitami: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - k \cdot x]$
14.	Asymptota různoběžná s o_x i s o_y, je-li zároveň tato asymptota tečnou v nevlastním bodě.	a_s: $x = k \cdot x + q$ když konstanty $k, q \in \mathbb{R}$ jsou určeny limitami: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x)$, $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - k \cdot f'(x)]$
15.	**Shrnutí** Pro nákres grafu funkce určujeme:	Charakteristické body (vrcholy, inflexní body, body vratu, úhlové body, nulové body, body nespojitosti): viz úlohy 2, 3, 6, 9, 10 Tečny v bodě – viz úloha 8 Asymptoty – viz úlohy 11-14

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora