INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Aplikace limit a derivací: Průběh funkce
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0218
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	1.12.2013
Datum ověření ve výuce:	16.12.2013
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě předložených vztahů zvládne určit průběh funkce a zakreslit její graf.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o aplikaci derivací. Může být použit k získání klasifikace.

Aplikace limit a derivací: Průběh funkce

V tuto chvíli máme již takové znalosti o limitách a derivacích, abychom se mohli pustit do komplexních úloh – vyšetřování průběhu funkce. Připomeňme si úvahy z minulých hodin, které se týkají 1. a 2. derivace funkce a jejich použití při zjišťování monotonnosti a konvexnosti a konkávnosti. Připomeňme si, jak se hledají extrémy, inflexe a asymptoty. Komplexním shrnutím všech poznatků budeme moci ve finále nakreslit grafy i poměrně složitých funkcí.

Při vyšetřování průběhu funkce $f\colon y = f(x)$ postupujeme takto:

1) Určíme $D(f)$
2) Stanovíme, zda je funkce případně sudá, lichá nebo periodická.
3) Najdeme body nespojitosti a rozhodneme o jejich druhu.
4) Určíme průsečíky se souřadnými osami o_x a o_y.
5) Vypočítáme 1. derivaci f' a podle jejího znaménka určíme:
   a) intervaly, kde je rostoucí (z podmínky $f' > 0$),
   b) intervaly, kde je klesající (z podmínky $f' < 0$),
   c) lokální extrémy – určíme stacionární body, zjistíme změny znaménka f'.
6) Vypočítáme 2. derivaci f'' a podle jejího znaménka určíme:
   a) intervaly, kde je konvexní (z podmínky $f'' > 0$),
   b) intervaly, kde je konkávní (z podmínky $f'' < 0$),
   c) inflexní body (podle změny znaménka f'').
7) Určíme asymptoty funkce (svislé, vodorovné, šikmé).
8) Vypočítáme funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrémy, inflexní body atd.).
9) Nakreslíme graf funkce.

Příklad 1: Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Řešení 1: Postupujme podle předchozího návodu:

1. Jedná se o racionální lomenou funkci, která není definovaná pouze v kořenech jmenovatele.
   Tyto kořeny určíme z rovnice:
   $$x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$
   Tedy: $\quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
2. Funkce f je spojitá v každém bodě $D(f)$.
3. Periodičnost. Funkce f není periodická, neboť pro každé $k \in \mathbb{R}^+$ existuje $x \in D(f)$ takové, že: $f(x+k) = \frac{(x+k)^3}{(x+k)^2-1} \neq f(x)$.

   Sudost, lichost. Nechť $x \in D(f)$. Pak
   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x).$$
   Funkce je lichá, její graf bude středově souměrný vzhledem k počátku. Tedy průběh funkce stačí vyšetřovat pouze na „polovině“ definičního oboru, tj. na množině $D^*(f) = \langle 0, 1) \cup (1, \infty)$.

   Všechny další výpočty budeme proto provádět v rámci této „poloviny“ definičního oboru, tj. v rámci množiny $D^*(f) = \langle 0, 1) \cup (1, \infty)$. Chování funkce na „zbytku“ definičního oboru určíme nakonec právě z lichosti funkce f.

4. Vypočteme f' a $D^*(f')$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}, \quad D^*(f') = D^*(f)$$

5. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná:

   a) Najdeme nulové body f', tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 - 3x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(x^2-3) = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x^2\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right) = 0.$$

   Dostaneme tři nulové body
$$x_0 = -\sqrt{3},\; x_1 = 0,\; x_2 = \sqrt{3}.$$
   Jelikož $x_0 \notin D^*(f)$, nebudeme jej dále do svých výpočtů zahrnovat. Vrátíme se k němu až na konci příkladu v bodě 10, kdy budeme kreslit graf funkce a z lichosti této funkce plyne, že chování funkce f v okolí bodu $x_0 = -\sqrt{3}$ se dá určit z chování funkce v okolí bodu $x_2 = \sqrt{3}$.

   b) Každý z intervalů tvořících $D^*(f') = \langle 0, 1) \cup (1, \infty)$ rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly.
$$(0, 1),\; \left(1, \sqrt{3}\right),\; \left(\sqrt{3}, \infty\right).$$

   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f' v tomto bodě.
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{9} < 0, \quad f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{25} < 0, \quad f'(2) = \frac{4}{9} > 0.$$
   Dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je tedy funkce f' záporná na intervalech $(0, 1)$ a $\left(1, \sqrt{3}\right)$ a kladná na intervalu $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$.

6. Určíme intervaly monotonie a lokální extrémy. Funkce f je klesající na intervalech $(0, 1)$ a $\left(1, \sqrt{3}\right)$ a rostoucí na intervalu $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$. Tedy f má v bodě $x_2 = \sqrt{3}$ ostré lokální minimum:
$$f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$
   Další lokální extrémy určíme v závěru příkladu z lichosti funkce.

7. Vypočteme f'' a $D^*(f'')$.

$$f''(x) = \left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} =$$
$$= \frac{(x^2-1)[(4x^3-6x)(x^2-1) - 4x(x^4-3x^2)]}{(x^2-1)^4} =$$
$$= \frac{4x^5 - 6x^3 - 4x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}, \quad D^*(f'') = D^*(f).$$

8. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.
   a) Najdeme nulové body f'', tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^3 + 6x = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x(x^2+3) = 0.$$

   V reálném oboru existuje jediné řešení této rovnice, a to bod $x_1 = 0$.
   b) Nyní máme rozdělit každý z intervalů tvořících $D^*(f'')$ nulovými body f'' na disjunktní intervaly. Vzhledem k tomu, že $x_1 = 0$ je krajní bod, dostáváme intervaly:

$$(0, 1), \quad (1, \infty).$$

   c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f'' v tomto bodě.

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{208}{27} < 0, \quad f''(2) = \frac{28}{27} > 0.$$

   Dle Caychyovy-Bolzanovy věty je tedy druhá derivace funkce f záporná na intervalu $(0, 1)$ a kladná na intervalu $(1, \infty)$.
9. Určíme intervaly, na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní a inflexní body.

   Funkce f je konkávní na intervalu $(0, 1)$ a konvexní na intervalu $(1, \infty)$.
   Inflexní body mohou být pouze tam, kde se mění konvexnost a konkávnost funkce. Na sjednocení intervalů $(0, 1) \cup (1, \infty)$ žádný inflexní bod není (bod 1 není bodem definičního oboru!), ale jelikož v tuto chvíli vyšetřujeme průběh funkce pouze na „polovině“ definičního oboru, zůstává otevřenou otázkou situace v bodě $x_1 = 0$.
10. Nyní máme najít asymptoty.
   a) Svislé asymptoty: Funkce není definována v bodě $x_3 = 1$. Je spojitá v každém bodě $D^*(f)$. Tedy pouze tímto bodem může procházet svislá asymptota (situace se týká pouze „poloviny“ definičního oboru). Vypočteme jednostrannou limitu v bodě $x_3 = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x+1} \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = +\infty.$$

   Tedy přímka $x = 1$ je svislou asymptotou grafu funkce f.
   b) Asymptota v $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3(1-\frac{1}{x^2})} = 1 = a.$$

Koeficient $a \in \mathbb{R}$, lze tedy počítat druhou limitu. Vyjde

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\frac{1}{x}}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = 0 = b.$$

Asymptota v plus nekonečnu má tedy rovnici $y = 1\cdot x + 0$, tj. $y = x$.

11. Určíme nulové body funkce f a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná. Nejprve najdeme nulové body funkce f.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

tj. bod $x_1 = 0$ je nulovým bodem funkce f.

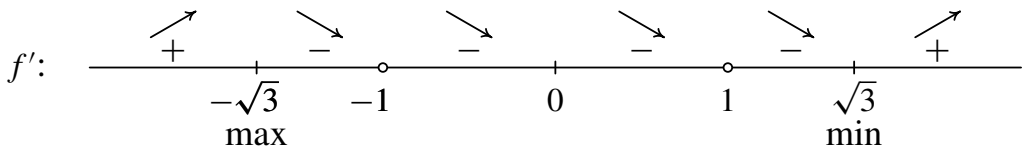
Funkce f je spojitá na intervalech $(0, 1)$ a na $(1, \infty)$, tudíž dle Cauchyovy-Bolzanovy věty stačí určit znaménko funkční hodnoty funkce f vždy v jednom z bodů jednotlivých intervalů $(0, 1)$, $(1, \infty)$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6} < 0,\ f(2) = \frac{8}{3} > 0,$$

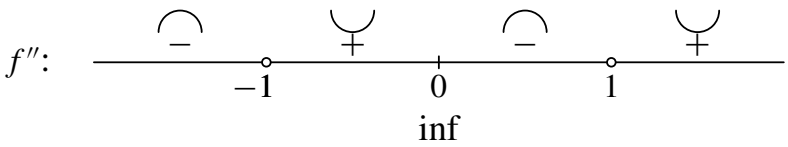
tedy f je záporná na $(0, 1)$ a kladná na $(1, \infty)$.

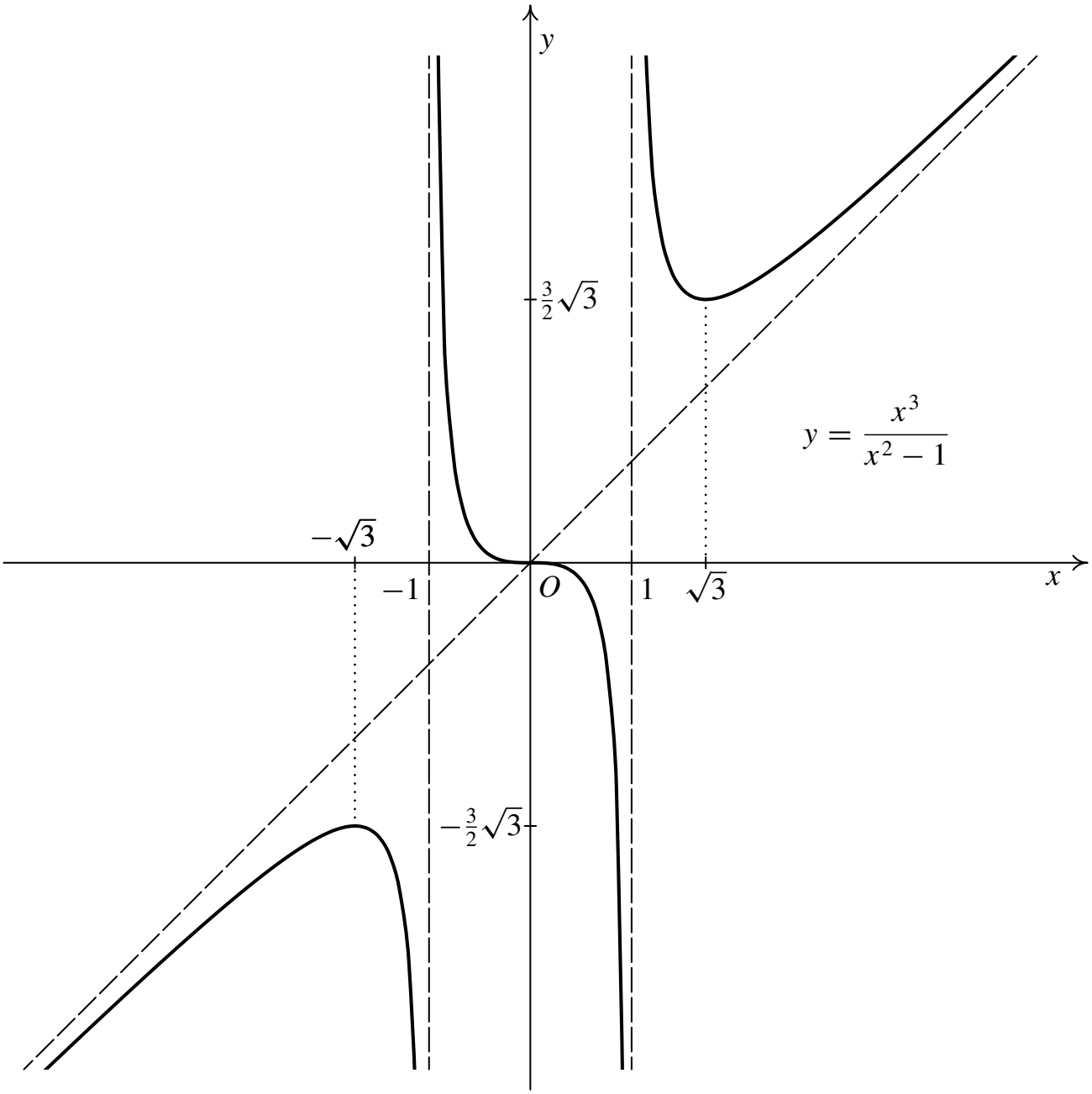
12. Shrnutím předchozích výsledků a využitím lichosti funkce f dostaneme následující poznatky o vlastnostech funkce f:

- rostoucí části funkce na intervalu $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ odpovídá rostoucí část funkce na intervalu $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, klesající části funkce na intervalu $\left(1, \sqrt{3}\right)$ odpovídá klesající část na intervalu $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$ a klesající části na intervalu $(0, 1)$ odpovídá klesající část na intervalu $(-1, 0)$,
- ostrému lokálnímu minimu v bodě $x_2 = \sqrt{3}$ odpovídá ostré lokální maximum v bodě $x_0 = -\sqrt{3}$. Znaménka derivace a monotonii si vyznačíme nad číselnou osu:



- konvexní části funkce na intervalu $(1, +\infty)$ odpovídá konkávní část funkce na intervalu $(-\infty, -1)$, konkávní části na intervalu $(0, 1)$ odpovídá konvexní část na intervalu $(-1, 0)$, tedy bod $x_1 = 0$ je inflexním bodem funkce f. Znaménka druhé derivace a konvexnost a konkávnost si vyznačíme opět nad číselnou osu:





- svislé asymptotě $x = 1$ odpovídá svislá asymptota $x = -1$,
- asymptotě $y = x$ v plus nekonečnu odpovídá stejná asymptota $y = x$ v minus nekonečnu,
- záporné části na intervalu $(0, 1)$ odpovídá kladná část na intervalu $(-1, 0)$ a kladné části na intervalu $(1, \infty)$ odpovídá záporná část na intervalu $(-\infty, -1)$.

Podle předchozího návodu určete průběhy následujících funkcí:

a) $f\colon y = x^3 - 3x + 2$

b) $f\colon y = \frac{x^2+1}{x}$

c) $f\colon y = \frac{x}{3-x^2}$

d) $f\colon y = \ln\left(4 - x^2\right)$

e) $f\colon y = \ln \frac{x+1}{1-x}$

f) $f\colon y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$

g) $f\colon y = xe^{\frac{1}{x}}$

h) $f\colon y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

i) $f\colon y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

Výsledky úloh

a) $D(f) = \mathbb{R}$, sgn f: $\overset{-}{\underset{-2}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{1}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$, sgn f': $\overset{+}{\underset{-1}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{1}{\text{———}}}\overset{-}{\text{———}}$, max: $f(-1) =$
$= 4$, min: $f(1) = 0$, sgn f'': $\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$, infl. bod $x = 0$.

b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, lichá, sgn f: $\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$, sgn f': $\overset{+}{\underset{-1}{\text{———}}}\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{-}{\underset{1}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$,
max: $f(-1) = -2$, min: $f(1) = 2$, sgn f'': $\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$, asymptoty $x = 0$, $y = x$.

c) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, lichá, sgn f: $\overset{+}{\underset{-\sqrt{3}}{\text{———}}}\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{\sqrt{3}}{\text{———}}}\overset{-}{\text{———}}$,
sgn f': $\overset{+}{\underset{-\sqrt{3}}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{\sqrt{3}}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$, sgn f'': $\overset{+}{\underset{-\sqrt{3}}{\text{———}}}\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{\sqrt{3}}{\text{———}}}\overset{-}{\text{———}}$, infl. bod $x = 0$,
asymptoty $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $y = 0$.

d) $D(f) = (-2, 2)$, sudá, sgn f: $\overset{-}{\underset{-2}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{-\sqrt{3}}{\text{———}}}\overset{-}{\underset{\sqrt{3}}{\text{———}}}\overset{}{\underset{2}{\text{———}}}$, sgn f': $\overset{+}{\underset{-2}{\text{———}}}\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{}{\underset{2}{\text{———}}}$,
max: $f(0) = \ln 4$, sgn f'': $\overset{-}{\underset{-2}{\text{———}}}\overset{}{\underset{2}{\text{———}}}$, asymptoty $x = -2$, $x = 2$.

e) $D(f) = (-1, 1)$, lichá, sgn f: $\overset{-}{\underset{-1}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{}{\underset{1}{\text{———}}}$, sgn f': $\overset{+}{\underset{-1}{\text{———}}}\overset{}{\underset{1}{\text{———}}}$,
sgn f'': $\overset{-}{\underset{-1}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{}{\underset{1}{\text{———}}}$, infl.bod $x = 0$, asymptoty $x = -1$, $x = 1$.

f) $D(f) = \mathbb{R}$, sgn f: $\overset{+}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{2}{\text{———}}}\overset{-}{\text{———}}$, sgn f': $\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{4/3}{\text{———}}}\overset{-}{\underset{2}{\text{———}}}\overset{-}{\text{———}}$,
max: $f(4/3) = (2/3)\sqrt[3]{4}$, min: $f(0) = 0$, sgn f'': $\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{-}{\underset{2}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$,
infl. bod $x = 2$, asymptota $y = -x + 2/3$.

g) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sgn f: $\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$, sgn f': $\overset{+}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{-}{\underset{1}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$, min: $f(1) = \mathrm{e}$,
sgn f'': $\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$, asymptoty $x = 0$, $y = x + 1$.

h) $D(f) = \mathbb{R}$, lichá, sgn f: $\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$, sgn f': $\overset{-}{\underset{-1}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{1}{\text{———}}}\overset{-}{\text{———}}$,
min: $f(-1) = -\mathrm{e}^{-1/2}$, max: $f(1) = \mathrm{e}^{-1/2}$, sgn f'': $\overset{-}{\underset{-\sqrt{3}}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{-}{\underset{\sqrt{3}}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$,
infl. bod $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, asymptota $y = 0$.

i) $D(f) = \mathbb{R}$, lichá, sgn f: $\overset{-}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$, sgn f': $\overset{-}{\underset{-1}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{1}{\text{———}}}\overset{-}{\text{———}}$,
min: $f(-1) = -\pi/2$, max: $f(1) = \pi/2$, sgn f'': $\overset{-}{\underset{-1}{\text{———}}}\overset{+}{\underset{0}{\text{———}}}\overset{-}{\underset{1}{\text{———}}}\overset{+}{\text{———}}$,
infl. bod $x = 0$, asymptota $y = 0$.

Použité materiály a zdroje

- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kuben J., Šarmanová P., Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: dp.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/dp.pdf>.
- FSI matematika online, Studijní text [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: Monotonnost-extremy.pdf. Dostupný z WWW: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=921>.
- Archiv autora