Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

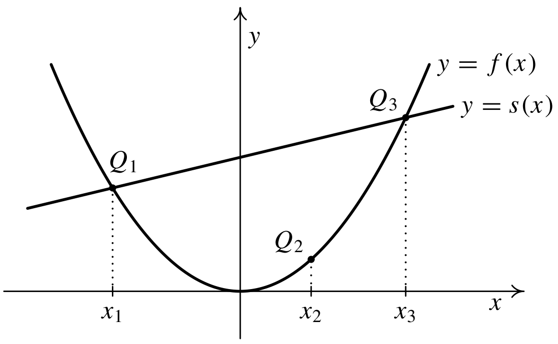
Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

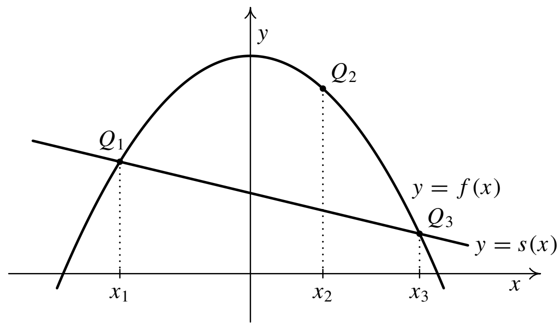
Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Aplikace derivací – konvexnost a konkávnost
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0217
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	27.11.2013
Datum ověření ve výuce:	5.12.2013
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě předložených vztahů zvládne určovat intervaly na nichž je funkce konvexní resp. konkávní a dále zjišťovat inflexní body.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o derivacích. Může být použit k získání klasifikace.

Aplikace derivací – vyšetřování konvexnosti a konkávnosti funkce

S pojmem konvexnosti resp. konkávnosti funkce jsme se zatím nesetkali. V minulých hodinách jsme se naučili vyšetřovat monotonii dané funkce a určovat, ve kterých bodech funkce nabývá lokálních extrémů. To spolu se znalostí definičního oboru, spojitosti, příp. sudosti, lichosti a periodičnosti umožňuje vytvořit si hrubou představu o grafu této funkce. Nyní se naučíme rozhodnout o tom, zda je graf funkce mezi dvěma body „prohnutý dolů“ nebo „nahoru“. Celou situaci si představíme na dvou obrázcích.
Zvolme na nějakém intervalu $I \subset D(f)$ tři body $x_1; x_2; x_3$, pro něž je $x_1 < x_2 < x_3$ a sestrojme sečnu s grafu funkce f, která prochází krajními body $Q_1[x_1, f(x_1)]$ a $Q_3[x_3, f(x_3)]$. Zkoumejme nyní, zda bod o souřadnicích $Q_2[x_2, f(x_2)]$ leží „**nad sečnou**“ anebo „**pod sečnou**“. Pokud bod Q_2 leží „pod sečnou“ pro libovolnou volbu tří bodů $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu I, pak říkáme, že funkce f je na intervalu I **ryze konvexní**. Pokud bod Q_2 leží naopak „nad sečnou“, říkáme, že funkce f je na intervalu I **ryze konkávní**.

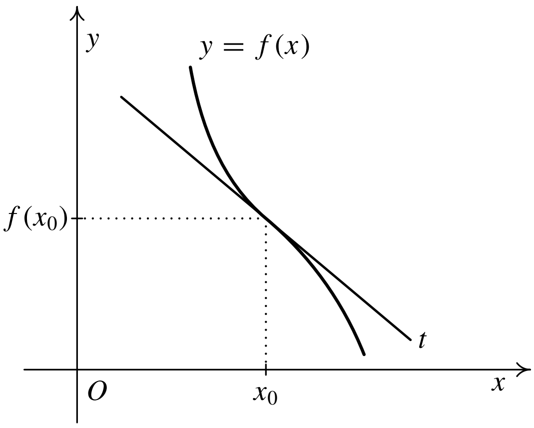


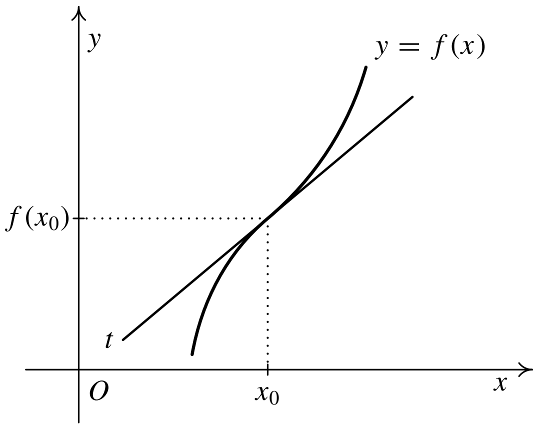
Graf je pod sečnou – funkce
je *ryze konvexní* na intervalu I



Graf je nad sečnou – funkce
je *ryze konkávní* na intervalu I

Bod v němž se mění konvexnost v konkávnost resp. naopak konkávnost v konvexnost se nazývá **inflexní bod**, resp. říkáme, že funkce má v tomto bodě tzv. inflexi. V inflexním bodě musí existovat tečna ke grafu funkce tedy musí v tomto bodu existovat derivace funkce.





Pojmy ryzí konvexnost, ryzí konkávnost a inflexní bod souvisí s vlastnostmi druhé derivace. Ukazuje to následující věta:

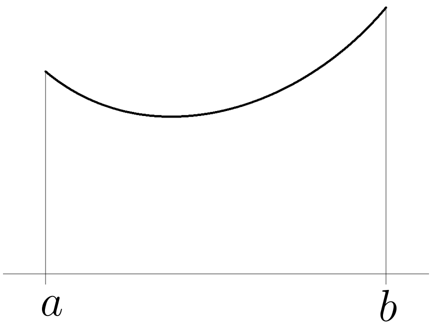
Nechť funkce $f\colon y = f(x)$ má na intervalu $(a,\ b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ druhou derivaci.
Jestliže $\forall x \in (a,\ b)$ platí, že :

a) $f''(x) > 0$, pak je f na $(a,\ b)$ **ryze konvexní**.

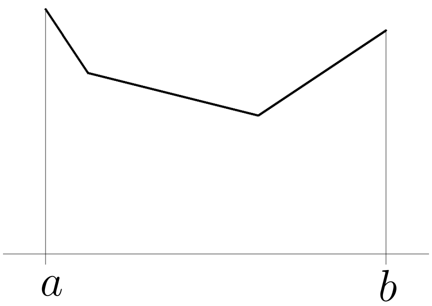
b) $f''(x) < 0$, pak je f na $(a,\ b)$ **ryze konkávní**.

c) $f''(x_0) = 0$ v nějakém bodě na $x_0 \in (a,\ b)$, a v bodě x_0 dochází ke změně znaménka druhé derivace (tj. mění se konvexnost v konkávnost nebo naopak), pak má funkce v bodě x_0 **inflexi**.

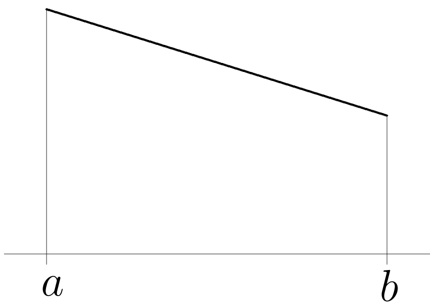
Prostudujte obrázky, abyste získali představu o konvexnosti, konkávnosti a inflexích



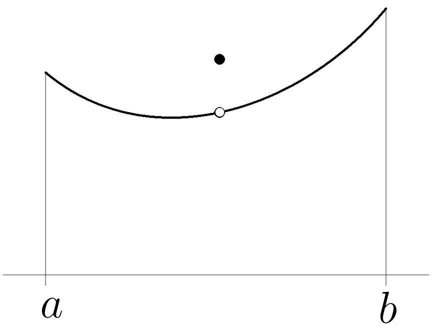
ryze konvexní



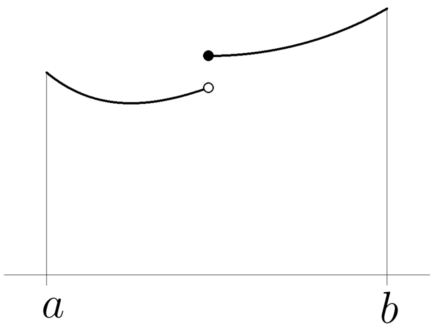
konvexní



konvexní i konkávní

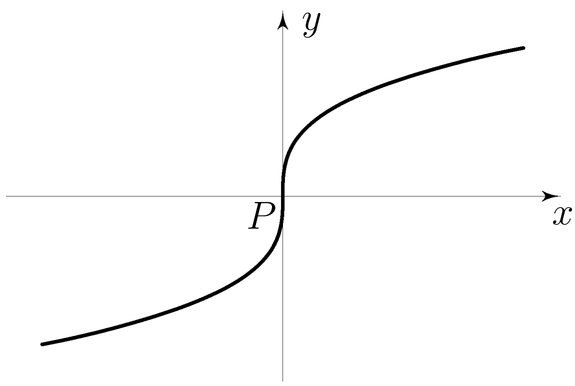


není konvexní



není konvexní

Mezi oblouky není inflexe, přestože se ve zlomovém bodě mění znaménko 2. derivace. Ve zlomovém bodě lze sestrojit pouze jednostranné tečny.



Ukázka existence inflexe v bodě P. Tečnu v tomto bodě lze sestrojit $\left(f''(0) = +\infty\right)$.

Postup při hledání maximálních intervalů konvexnosti resp. konkávnosti a inflexních bodů:

Postup je značně podobný postupu pro hledání lokálních extrémů:

1. Určíme $D(f)$.
2. Vypočítáme f' a $D(f')$ a f'' a $D(f'')$.
3. Určíme na $D(f)$ body v nichž je nulová druhá derivace (řešíme rovnici $f'' = 0$) a body v nichž neexistuje vlastní derivace f''. Tyto body jsou „podezřelé“ z toho, že v nich nachází inflexe.
4. Tyto body zakreslíme do harmonogramu pro zjišťování znaménka 2. derivace a následně zjistíme znaménko druhé derivace na jednotlivých podintervalech.
5. Podle znamének vyčtených z harmonogramu určíme, zda je funkce na daném podintervalu konvexní či konkávní.
6. Z harmonogramu dále vyčteme, v kterých bodech dochází ke změně znaménka 2. derivace a podle toho určíme, zda je v daném bodě inflexe či nikoliv.

POZOR! V bodě x_0 pro v němž je $f''(x_0) = 0$ inflexe nastat **může**, ale také **nemusí** (viz funkce $y = x^2$, která má v bodě $x_0 = 0$ nulovou druhou derivaci, ale inflexe v něm nenastává). Stejně tak může ale nemusí nastat inflexe v bodě, v němž neexistuje vlastní 2. derivace. Pokud nelze nalézt klasické řešení rovnice $f'' = 0$, používáme opět Cauchy-Bolzanovu větu a numerické metody pro nalezení alespoň přibližného řešení.

Příklad 1: Je dána funkce $f\colon y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3$. Najděte maximální intervaly na nichž je funkce konvexní nebo konkávní. Dále nalezněte všechny inflexní body.

Řešení 1:

1. Určíme definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Vypočteme první derivaci a její definiční obor:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 7, \qquad D(f') = D(f).$$

3. Vypočteme druhou derivaci a její definiční obor:

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24, \qquad D(f'') = D(f).$$

4. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.
   a) Určíme nulové body f'', tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12(x^2 - x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1\,,\, x_2 = 2.$$

   b) $D(f'')$ rozdělíme nulovými body f'' na disjunktní intervaly:

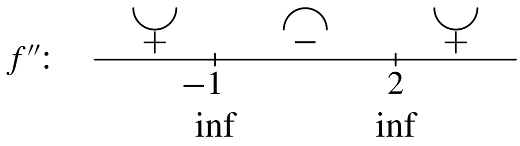
$$(-\infty, -1), \quad (-1, 2), \quad (2, \infty).$$

c) Vybereme z každého intervalu jeden bod, např. -2, 0 a 3, a určíme znaménko f'' v tomto bodě.

$$f''(-2) = 48 > 0, \qquad f''(0) = -24 < 0, \qquad f''(3) = 48 > 0.$$

Tudíž dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je funkce f'' kladná na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(2, \infty)$ a záporná na intervalu $(-1, 2)$.

5. Dle věty 9.28 je tedy funkce f ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(-1, 2)$. Body $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ jsou inflexními body funkce f. Znaménka druhé derivace a konvexnost resp. konkávnost na příslušných intervalech můžeme vyznačit nad číselnou osu nebo do tabulky. Přitom oblouček $\cup$ bude značit ryze konvexní část funkce a oblouček $\cap$ ryze konkávní část funkce f. Plus a minus označuje znaménko druhé derivace.

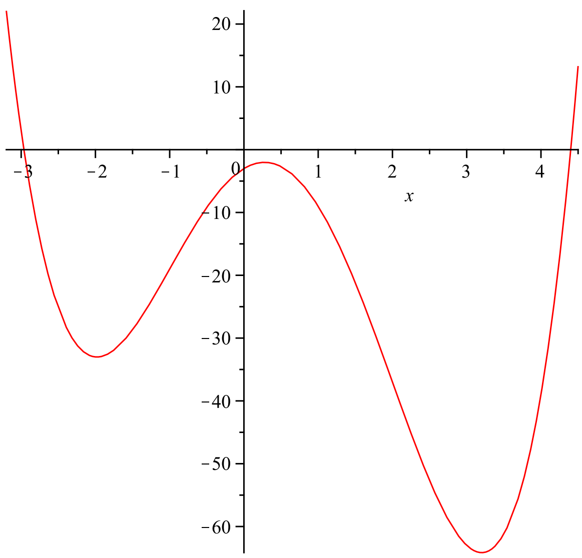


Tabulka:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, \infty)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	inf.	$\cap$	inf.	$\cup$

6. Závěr: Vzhledem ke spojitosti funkce na $\mathbb{R}$ platí, že funkce f je ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 2, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $\langle -1, 2\rangle$. Body $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ jsou inflexními body funkce f. ▲

Výsledek úlohy můžete nyní konfrontovat s grafem funkce f na následující straně:



f: $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3$.

Podle předchozího návodu určete maximální intervaly konvexnosti resp. konkávnosti a dále určete body, v nichž má funkce případné inflexe.

Úloha 1. $y = x\,(1-x)^2$

Úloha 2. $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$

Úloha 3. $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$

Úloha 4. $y = x^2 - 1 + \sqrt[3]{x^2}$

Úloha 5. $y = x + \frac{1}{x^2}$

Úloha 6. $y = \frac{x}{1+x^2}$

Úloha 7. $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Úloha 8. $y = x \ln x$

Výsledky úloh

Označení: Pro konkávní funkci budeme používat symbol $\cap$, pro konvexní symbol $\cup$.

1. $\cap(-\infty, \frac{2}{3})$, $\cup(\frac{2}{3}, +\infty)$, inflexe $x_1 = \frac{2}{3}$

2. $\cap(-\infty, 1)$, $\cup(1, +\infty)$, inflexe $x_1 = 1$

3. $\cup(-\infty, -2)$, $\cup(1, +\infty)$, $\cap(-2, 1)$, inflexe $x_1 = -2$, $x_2 = 1$

4. $\cup\left(-\infty, -\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$, $\cup\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, +\infty\right)$, $\cap\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}, 0\right)$, $\cap\left(0, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$, inflexe $x_{1,2} = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$

5. $\cup\,(-\infty, 0)$, $\cup\,(0, +\infty)$,

6. $\cup\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $\cup\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, $\cap\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\cap\left(0, \sqrt{3}\right)$, inflexe $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, $x_3 = 0$

7. $\cup\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $\cup\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, $\cap\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\cap\left(0, \sqrt{3}\right)$, inflexe $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, $x_3 = 0$

8. $\cup\,(0, +\infty)$,

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kuben J., Šarmanová P., Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: dp.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/dp.pdf>.
- FSI matematika online, Studijní text [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: Monotonnost-extremy.pdf. Dostupný z WWW: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=921>.
- Archiv autora