INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

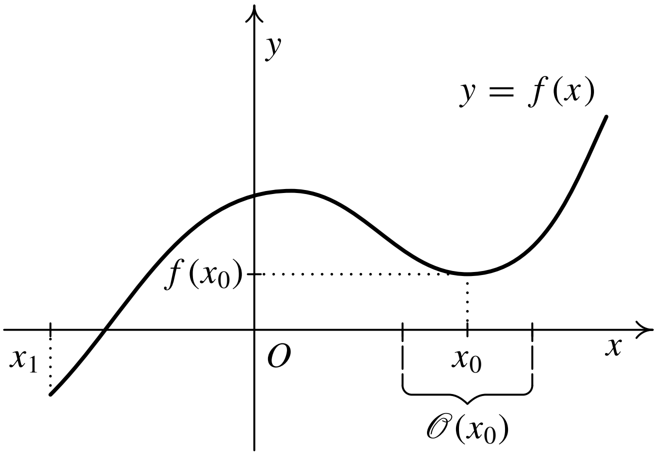
Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

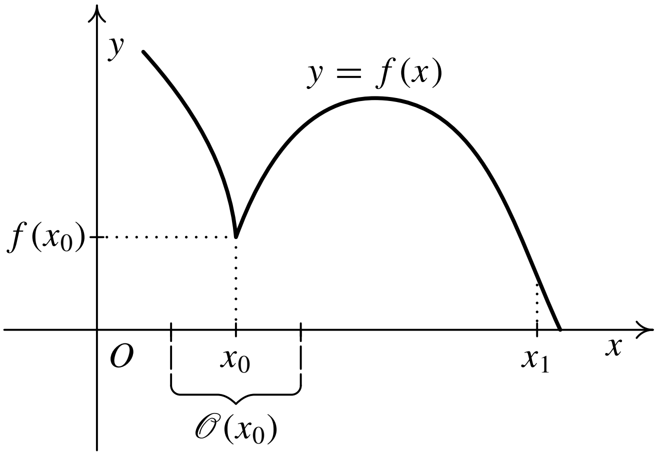
Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Aplikace derivací – výpočet lokálních extrémů
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0216
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	24.11.2013
Datum ověření ve výuce:	4.12.2013
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě předložených vztahů zvládne určovat stacionární body a počítat lokální extrémy funkcí.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o derivacích. Může být použit k získání klasifikace.

Aplikace derivací – zjišťování lokálních extrémů funkce

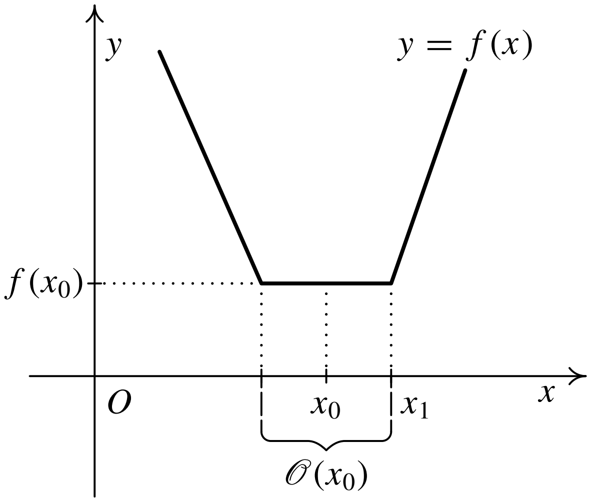
Ve 2. ročníku jsme se učili definici lokálních extrémů (resp. ostrých l.e.) – minima a maxima.

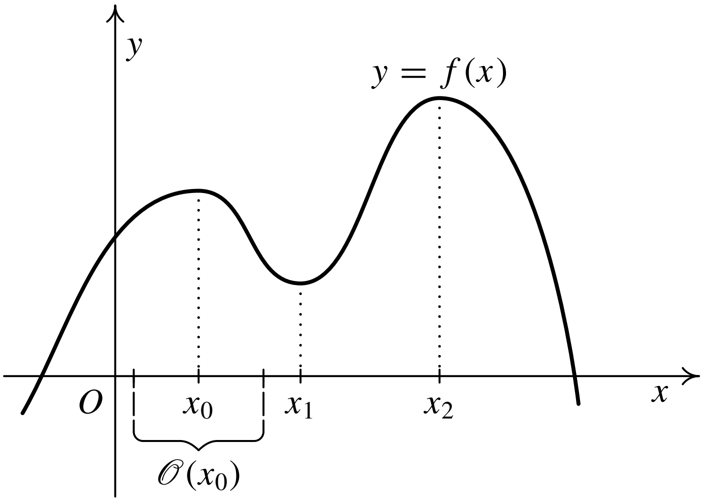


a)



b)





Připomeňme si úvahy z minulých hodin, které se týkají derivace funkce, závislosti monotonnosti funkce na znaménku první derivace, připomeňme si pojem tzv. stacionárních bodů a vzpomeňme na tzv. nutnou a postačující podmínky pro existenci lokálního extrému na daném intervalu.

- V bodě x_0 je tzv. **stacionární bod**, je-li v tomto bodě $f'(x_0) = 0$.
- **Nutná podmínka pro lokální extrémy** spojité funkce na otevřeném intervalu: **Lokální extrém může nastat** jen v těch bodech otevřeného intervalu, v nichž **je první derivace nulová** nebo v nichž **první derivace neexistuje**.
- **Postačující podmínka existence lokálního extrému** spojité funkce na otevřeném intervalu: **Lokální extrémy nastávají pouze v bodech v nichž se mění znaménko první derivace**.
- **Lok. maximum** nastává v bodě, kde se mění znaménko 1. derivace z + na −, **lok. minimum** v bodě, kde se mění znaménko z − na +.

Postup při hledání lokálních extrémů a maximálních intervalů ryzí monotonie:

1. Určíme $D(f)$.
2. Vypočítáme f' a $D(f')$.
3. Určíme na $D(f)$ stacionární body (řešíme rovnici $f' = 0$) a body v nichž neexistuje f'. Tyto body jsou „podezřelé“ z toho, že v nich nachází extrém.
4. Tyto body zakreslíme do harmonogramu pro zjišťování znaménka 1. derivace a následně pomocí něj zjistíme znaménko první derivace na jednotlivých podintervalech.
5. Zjistíme, zda a jakým způsobem se v „podezřelých“ bodech mění znaménko 1. derivace a podle toho určíme druh extrému.

POZOR! Ve stacionárním bodě extrém nastat **může**, ale také **nemusí** (viz funkce $y = x^3$, která má v bodě $x_0 = 0$ sice stacionární bod, ale extrém v něm nenastává). Stejně tak může ale nemusí nastat extrém v bodě, v němž 1. derivace neexistuje. Pokud nelze nalézt stacionární bod klasickým řešením rovnice $f' = 0$, používáme Cauchy-Bolzanovu větu (pokud u spojité funkce na uzavřeném ohraničeném intervalu $\langle a, b\rangle$ platí $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak na tomto intervalu existuje alespoň jeden nulový bod funkce f). Numerickými metodami (např. půlení intervalu) lze případné nulové body najít aspoň přibližně.

Příklad 1: Najděte lokální extrémy a intervaly monotonnosti funkce $f\colon y = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60$.

Řešení 1:

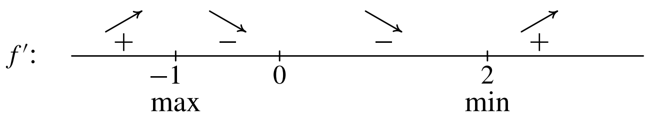
1. $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Vypočteme f' a $D(f')$:
$$f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 120x^2, \qquad D(f') = \mathbb{R}.$$
3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná:

   a) Nulové body f':
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 60x^4 - 60x^3 - 120x^2 = 0.$$
   Jedná se o algebraickou rovnici čtvrtého stupně, která má čtyři kořeny (obecně komplexní, počítáno s násobností). Ovšem při řešení těchto příkladů hledáme pouze reálná řešení, neboť chceme najít stacionární body, tedy body z definičního oboru funkce f' (a ten je pro každou funkci podmnožinou $\mathbb{R}$).
   Rovnici upravíme na tvar:
$$60x^2(x^2 - x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 60x^2 = 0 \quad \text{nebo} \quad x^2 - x - 2 = 0.$$
   Vyřešením rovnice $60x^2 = 0$ dostaneme dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 0$ a vyřešením rovnice $x^2 - x - 2 = 0$ obdržíme další dva kořeny
$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2, \\ -1. \end{cases}$$
   Všechny kořeny jsou reálné. Stacionární body tudíž jsou $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 2$ a $x_4 = -1$.

   b) $D(f')$ rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly:
$$(-\infty, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 2), \quad (2, \infty).$$

   c) V každém z „dílčích“ intervalů zvolíme jeden bod a v něm určíme znaménko funkce f'. Body zvolíme např. takto: -2, $-\frac{1}{2}$, 1, 3. Pak
$$f'(-2) = 960 > 0, \; f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{75}{4} < 0, \; f'(1) = -120 < 0, \; f'(3) = 2160 > 0.$$

   Tedy dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je f' na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, 2)$ záporná a na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(2, \infty)$ kladná.
4. Intervaly monotonie a lokální extrémy.
   Dle věty 9.1 je funkce f na intervalu $(-\infty, -1)$ rostoucí, na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, 2)$ klesající a na intervalu $(2, \infty)$ opět rostoucí. Funkce f má tedy v bodě $x_4 = -1$ ostré lokální maximum a v bodě $x_3 = 2$ ostré lokální minimum. V bodě $x_{1,2} = 0$ lokální extrém nemá. Vypočteme funkční hodnoty v bodech lokálních extrémů. Vyjde $f(-1) = 73$, $f(2) = -116$.
   Znaménka derivace a monotonii na příslušných intervalech můžeme zakreslit nad číselnou osu

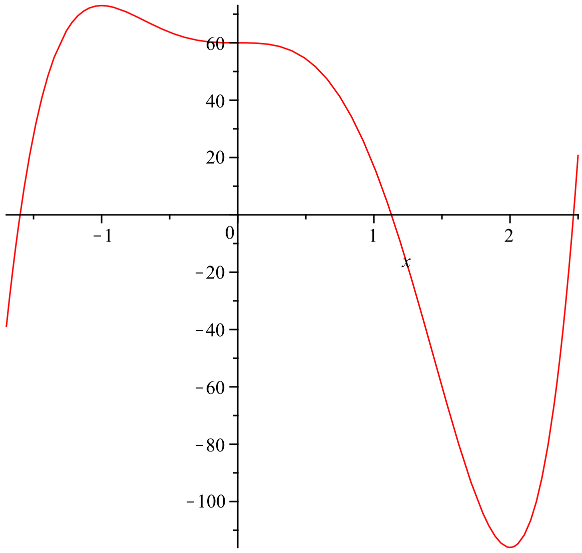


   nebo zapsat do tabulky:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$		$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

5. Závěr: Funkce f je rostoucí intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 2, \infty)$ a klesající na intervalu $\langle -1, 2\rangle$ (vzhledem ke spojitosti v bodě 0 jsme intervaly mohli sjednotit). Funkce f má tedy v bodě $x_4 = -1$ ostré lokální maximum a v bodě $x_3 = 2$ ostré lokální minimum. ▲

Výsledek předchozí úlohy můžete nyní konfrontovat s grafem funkce:



f: $y = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60.$

Podle předchozích návodů hledejte lokální extrémy následujících funkcí:

Úloha 1. $y = \frac{x^2}{x+3}$

Úloha 2. $y = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$

Úloha 3. $y = xe^{-x^2}$

Úloha 4. $y = \frac{x^2}{\ln x}$

Úloha 5. $y = x - 2\sin x$. Hledejte extrémy na intervalu $(0, 2\pi)$

Úloha 6. $y = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{1}{x}$

Výsledky úloh

1. $M_i\,[0,0]$, $M_a\,[-6,-12]$
2. $M_i\left[2, 2\sqrt{2}\right]$
3. $M_i\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}\right]$, $M_a\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right]$
4. $M_i\left[\sqrt{e}, e\right]$
5. M_i pro $x = \frac{\pi}{3}$, M_a pro $x = \frac{5\pi}{3}$
6. $M_i\left[e, -\frac{1}{e}\right]$

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kuben J., Šarmanová P., Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: dp.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/dp.pdf>.
- FSI matematika online, Studijní text [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: Monotonnost-extremy.pdf. Dostupný z WWW: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=921>.
- Archiv autora