INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Derivace funkce dané implicitně
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0213
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	10.11.2013
Datum ověření ve výuce:	20.11.2013
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě předložených vztahů zvládne derivace implicitně zadaných funkcí.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o derivacích. Může být použit k získání klasifikace.

Derivace funkce dané implicitně

Na rozdíl od funkce dané explicitně, která má funkční předpis ve tvaru $f\colon y = f(x)$, je implicitní funkce daná předpisem $F(x, y) = 0$. Závislá proměnná y není přímo vyjádřena pomocí nezávislé proměnné x. U funkce dané implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ předpokládáme existenci explicitního tvaru $y = f(x)$, i když někdy nedovedeme vypočítat y z rovnice $F(x, y) = 0$. Ve funkční rovnici $F(x, y) = 0$ je tedy y jistou funkcí proměnné x (nejčastěji funkcí složenou).

> Derivaci implicitní funkce $F(x, y) = 0$ spočítáme formálně tak, že funkci $F(x, y) = 0$ derivujeme podle proměnné x, přičemž y považujeme za (složenou) funkci proměnné x.
> Ze vzniklé rovnice vyjádříme derivaci y' jako neznámou.

Příklad 1: Derivujte implicitně danou funkci $F\colon x^2 - 2xy + y^3 - 1 = 0$

Řešení 1: Zderivujeme podle proměnné x, přičemž se na y díváme jako na složenou funkci proměnné x:

$$2x - 2(y + y' \cdot x) + 3y^2 y' = 0$$

Nyní z předchozí rovnice vyjádříme y':

$$y' = \frac{2 \cdot (y - x)}{3y^2 - 2x}$$

Derivace funkce vypočítaná z implicitního vyjádření je obyčejně opět implicitní funkce (tj. je vyjádřena oběma proměnnými x i y). Hledáme-li derivaci funkce v jistém bodě $M\,[x_0,\ y_0]$, musíme nejprve pro určité x_0 vypočítat z implicitní rovnice $F(x, y) = 0$ odpovídající hodnotu y_0 a následně do vztahu pro derivaci y' dosadit za x a y příslušné hodnoty x_0 a y_0.

Příklad 2: Určete hodnotu derivace funkce $F\colon x^2 - 2xy + y^3 - 1 = 0$ (z předchozí úlohy) v bodě $M = [0, ?]$.

Řešení 2: Pokud do rovnice $F(x, y) = 0$ dosadíme za $x = 0$ a vyřešíme rovnici $y^3 - 1 = 0$, vypočítáme potřebnou hodnotu y_0. V tomto případě je $y_0 = 1$. Zajímá nás tedy hodnota derivace v bodě $M = [0, 1]$. V předchozí úloze jsme vypočítali derivaci:

$$y' = \frac{2 \cdot (y - x)}{3y^2 - 2x}$$

Tedy hodnota derivace v $M = [0, 1]$ je rovna:

$$F'(0, 1) = y'(0, 1) = \frac{2 \cdot (1 - 0)}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 0} = \frac{2}{3}$$

Hodnota derivace implicitní funkce F v bodě M (tedy směrnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě) je rovna $\frac{2}{3}$.

Podle předchozích návodů zderivujte následující implicitní funkce:

Úloha 1. $y^2 = 2px, \quad p \in \mathbb{R}$ konstanta

Úloha 2. $x^3 + y^3 = 3axy, \quad a \in \mathbb{R}$ konstanta

Úloha 3. $xy - \ln y = a, \quad a \in \mathbb{R}$ konstanta

Úloha 4. $ye^x + e^y = 0$

Úloha 5. $y - \operatorname{arctg} y = x$

Úloha 6. Určete derivaci funkce $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$ a určete rovnici tečny v bodě $T = [1, -1]$ dané kuželosečky. Vypočítejte směrový úhel tečny s přesností na minuty.

Úloha 7. Určete derivaci funkce $y^2 - 2y - 2x + 1 = 0$ a určete rovnici tečny v bodě $T = [8,\ 5]$ dané kuželosečky. Vypočítejte směrový úhel tečny s přesností na minuty.

Úloha 8. V kterém bodě paraboly $y^2 = 4x - 8$ je tečna kolmá na osu I. a III. kvadrantu?

Úloha 9. Vypočítejte odchylku tečen křivek $x^2 + y^2 = 5$, $2x^2 + y^2 = 9$ v jejich průsečících.

Úloha 10. $x^y = y^x$

Úloha 11. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Výsledky úloh

1. $y' = \frac{p}{y}$
2. $y' = \frac{ay-x^2}{y^2-ax}$
3. $y' = \frac{y^2}{1-xy}$
4. $y' = \frac{y}{y-1}$
5. $y' = \frac{1}{y^2} + 1$
6. $t\colon y + 1 = 0,\ \ \varphi = 0^\circ$
7. $t\colon y - 5 = \frac{1}{4} \cdot (x - 8),\ \ \varphi \doteq 14^\circ 02'$
8. $T\,[3,\ -2]$
9. $\varphi \doteq 12^\circ 32'$
10. $y' = \frac{y(y-x\ln y)}{x(x-y\ln x)}$
11. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora