



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Logaritmická derivace
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0212
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4.
Autor:	RNDr. Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	20.10.2013
Datum ověření ve výuce:	6.11.2013
Druh učebního materiálu:	Pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě předložených vztahů zvládne využívat logaritmické derivace pro derivování funkcí.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o derivacích. Může být použit k získání klasifikace.

Logaritmická derivace

Funkce vyjádřené výrazem, který lze logaritmovat, můžeme derivovat metodou tzv. **logaritmické derivace**. Kromě funkcí, které jsou součinem a podílem mocnin funkcí, derivujeme metodou logaritmické derivace i funkce, které mají charakter mocninné i exponenciální funkce tj. funkce tvaru $y = [f(x)]^{g(x)}$ (stručně $y = f^g$). Podstatou této metody je derivace složené logaritmické funkce.

$$[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Při označení $y = f(x)$ jednoduše píšeme $[\ln y]' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$

Příklad: Derivujte funkci

$$y = \frac{(x+1)^3 \cdot \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$$

Návod: 1. **krok:** funkční rovnici zlogaritmujeme (přirozeným logaritmem)

$$\ln y = 3 \cdot \ln(x+1) + \frac{1}{4} \cdot \ln(x-2) - \frac{2}{5} \cdot \ln(x-3)$$

2. **krok:** derivujeme obě strany vzniklé rovnosti funkcí:

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{4 \cdot (x-2)} - \frac{2}{5 \cdot (x-3)}$$

3. **krok:** Pravou stranu upravíme:

$$\frac{y'}{y} = \frac{57x^2 - 302x + 361}{20 \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}$$

4. **krok:** rovnost násobíme „číslem“ y , za něž na pravé straně dosadíme danou funkci y . Po krácení obdržíme výsledek:

$$y' = \frac{57x^2 - 302x + 361}{20 \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)} \cdot \frac{(x+1)^3 \cdot \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$$

Ukažme ještě ukázkou derivace funkce typu $y = f^g$.

Příklad: Derivujte funkci

$$y = (\sin x)^{\cos x}$$

Návod: 1. **krok** – zlogaritmujeme:

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x$$

2. krok – zderivujeme:

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \quad | \cdot y$$

3. a 4. krok:

$$y' = (\cos x \cdot \cotg x - \sin x \cdot \ln \sin x) \cdot (\sin x)^{\cos x}$$

Podle předchozích návodů zderivujte užitím logaritmické derivace následující funkce:

Úloha 1. $y = (1 + x) \cdot \sqrt{2 + x^2} \cdot \sqrt[3]{3 + x^3}$

Úloha 2. $y = \frac{(3-x)^4 \cdot \sqrt{x+2}}{(x+1)^5}$

Úloha 3. $y = \sqrt[3]{\frac{x \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}}$

Úloha 4. $y = x^x$

Úloha 5. $y = 2 \cdot x^{\sqrt{x}}$

Úloha 6. $y = x^{x^2}$

Úloha 7. $y = (\ln x)^x$

Úloha 8. $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

Výsledky úloh

$$1. \quad y' = \frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$$

$$2. \quad y' = \frac{(x^2-32x-73) \cdot (3-x)^3}{2 \cdot (x+1)^6 \cdot \sqrt{x+2}}$$

$$3. \quad y' = \frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)} \cdot \sqrt[3]{\frac{x \cdot (x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$$

$$4. \quad y' = x^x \cdot (1 + \ln x)$$

$$5. \quad y' = \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}} \cdot y$$

$$6. \quad y' = x^{x^2+1} \cdot (2 \ln x + 1)$$

$$7. \quad y' = y \cdot \left(\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x) \right)$$

$$8. \quad y' = y \cdot \left(\frac{1}{x+1} + \ln \frac{x}{x+1} \right)$$

Použité materiály a zdroje

- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora