



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

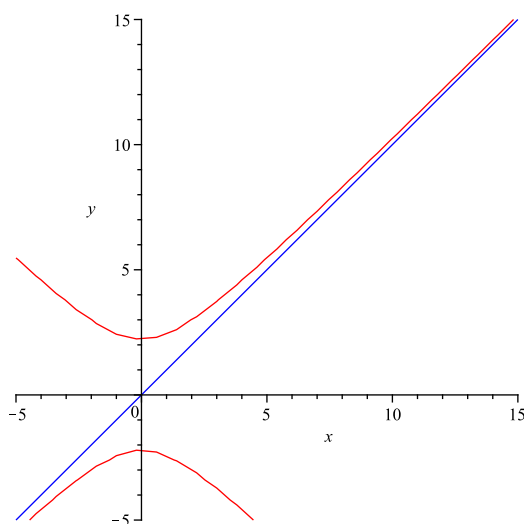
Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Odhady limit užitím grafů funkcí
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0209
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	6.10.2013
Datum ověření ve výuce:	16.10.2013
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Pozná souvislost mezi asymptotickým chováním grafů funkcí a limitou v nevlastním bodě a umí aplikovat získané poznatky při řešení praktických úloh.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o limitách. Může být použit k získání klasifikace.

Odhady limit užitím grafů funkcí

Podívejte pečlivě se na funkci, jejíž limitu počítáte. Zobrazte graf funkce (souvislost s kuželosečkami nebo grafy elementárních funkcí) a z grafu odhadněte výslednou limitu:

Příklad: Odhadněte a vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$

Návod: Uvažujme funkci $f : y = \sqrt{x^2 + 5}$. Pokud obě strany rovnosti umocníme na druhou a upravíme, získáme rovnici rovnoosé hyperboly o středovém tvaru $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} = 1$ (hyperbola má střed v počátku souřadné soustavy a obě poloosy o délce $\sqrt{5}$, hlavní poloosa je rovnoběžná s osou o_y). Pokud do téhož obrázku na němž je hyperbola zakreslíme graf funkce $g : y = x$ a budeme zkoumat, jak se pro zvětšující se hodnoty argumentu $x \rightarrow +\infty$ chová rozdíl funkčních hodnot funkcí $f(x) - g(x)$ zjistíme, jak vyjde hodnota počítané limity.



Výsledek: Vypočítejme nyní limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$. Rozšířením převedeme limitu neurčitého typu $\infty - \infty$ na typ $\frac{\infty}{\infty}$, kterou následně po dalším rozšíření vyřešíme. Řešení: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x) = 0$.

Podle předchozího návodu nyní nakreslete příslušné obrázky, odhadněte a následně vypočítejte limity v následujících úlohách.

Úloha 1. Odhadněte a vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x + 2)$

Úloha 2. Odhadněte a vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x - 3)$

Úloha 3. Odhadněte a vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - 2x)$

Úloha 4. Odhadněte a vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

Úloha 5. Odhadněte a vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - x)$

Úloha 6. Odhadněte a vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x}$

Úloha 7. Odhadněte a vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x)$

Úloha 8. Odhadněte a vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

Úloha 9. Odhadněte a vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x}{2^x - 3^x}$

Úloha 10. Odhadněte a vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}$. (Návod: paraboly)

Úloha 11. Odhadněte a vypočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 5}{3 \ln x - 1}$.

Výsledky úloh

1. 2

3. $+\infty$

5. $+\infty$

7. $-\infty$

9. -1

11. $\frac{1}{3}$

2. 3

4. 1

6. $+\infty$

8. 0

10. 1

Použité materiály a zdroje

■ Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.

■ Archiv autora