INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Geometrický význam nevlastní limity v nevlastním bodě
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0207
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	1.10.2013
Datum ověření ve výuce:	14.10.2013
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Pozná souvislost mezi asymptotickým chováním grafů funkcí a nevlastní limitou v nevlastním bodě a umí aplikovat získané poznatky při výpočtu šikmých asymptot.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o limitách. Může být použit k získání klasifikace.

Geometrický význam nevlastní limity v nevlastním bodě

Funkce se pro velké hodnoty argumentů mohou chovat různě. Má-li funkce $f\colon y = f(x)$ v nevlastním bodě $+\infty$ (resp. $-\infty$) nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$, pak může graf funkce do $\pm\infty$ růst nebo klesat „různou rychlostí". Může se dokonce v některých případech stát, že se pro velké hodnoty argumentů funkce začne „chovat lineárně" (tzn., že graf začne mít od určitého okamžiku charakter přímky). V tom případě říkáme, že má graf funkce tzv. asymptotu s nenulovou směrnicí neboli šikmou asymptotu.

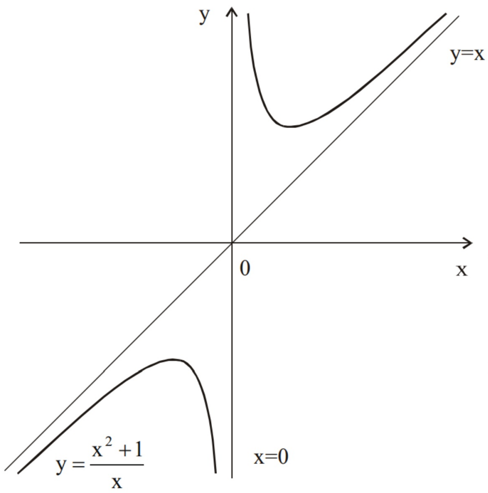
Přímka s rovnicí

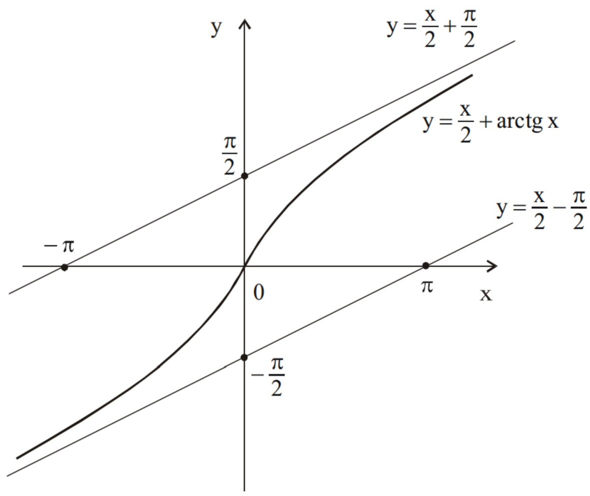
$$\boxed{a_s\colon y = k \cdot x + q}$$

je šikmou asymptotou, **pokud existují obě vlastní limity**

$$\boxed{k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - k \cdot x}$$

Připomínáme, že graf funkce může mít dvě šikmé asymptoty, jednu v $+\infty$ a druhou v $-\infty$. Aby mělo vůbec smysl uvažovat o asymptotě, musí být alespoň jeden nevlastní bod $\pm\infty$ zahrnut to definičního oboru.





Příklad: Najděte asymptoty grafu funkce $f\colon y = x + \frac{1}{x-1}$.

Návod: Vzhledem k tomu, že bod $x = 1$ je bod nespojitosti a platí $\lim\limits_{x\to 1+} \left(x + \frac{1}{x-1}\right) = \infty$, je zřejmé, že přímka $a_1\colon x = 1$ je asymptotou bez směrnice (svislá). Jiné asymptoty bez směrnice neexistují, protože je daná funkce spojitá pro každé $x \neq 1$. Hledejme proto asymptoty se směrnicí. Vypočítejme nejprve limity určující koeficienty k a q:

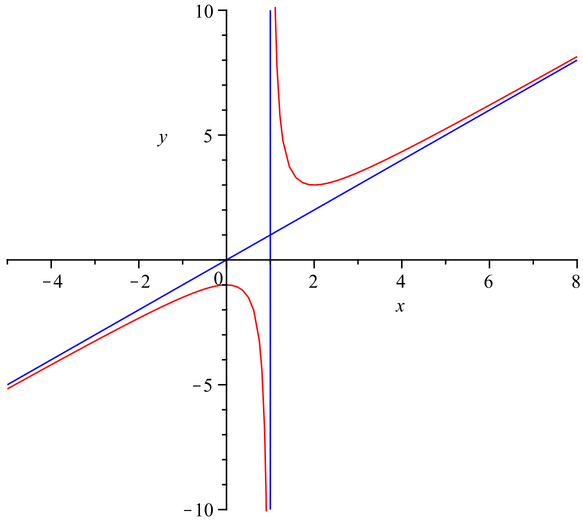
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\frac{1}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2-x}\right) = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{1}{x-1} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

POZOR! Limity pro $x \to +\infty$ a $x \to -\infty$ je třeba formálně počítat samostatně!

Výsledek: Existují dvě asymptoty. První je bez směrnice a má rovnici $a_1\colon x = 1$, druhá je šikmá (s nenulovou směrnicí) a má rovnici $a_2\colon y = x$.

Pro názornost dáváme k dispozici graf vyšetřované funkce, aby mohlo být řešení porovnáno se skutečným grafem.



$$y = x + \frac{1}{x-1}.$$

Podle předchozího návodu zjistěte, zda existují šikmé asymptoty grafu funkce $f\colon y = f(x)$ a zapište jejich rovnice (o asymptoty bez směrnice se v tuto chvíli nezajímáme).

Úloha 1. $f_1\colon y = \frac{x^3}{x^2-x-2}$

Úloha 2. $f_2\colon y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

Úloha 3. $f_3\colon y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$

Úloha 4. $f_4\colon y = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$

Úloha 5. $f_5\colon y = x \cdot \cos \frac{1}{x}$

Úloha 6. $f_6\colon y = x \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$

Úloha 7. $f_6\colon y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$

Výsledky úloh

1. $a_s\colon y = x + 1$

2. $a_s\colon y = \frac{x}{2} - 1$

3. $a_s\colon y = -x + \frac{2}{3}$

4. $a_1\colon y = -x,\ a_1\colon y = x$

5. $a_s\colon y = x$

6. $a_s\colon y = x$

7. $a_1\colon y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2},\ a_2\colon y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$

Použité materiály a zdroje

- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora