evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Počítání s nevlastními hodnotami
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0203
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	17.9.2013
Datum ověření ve výuce:	18.9.2013
Druh učebního materiálu:	prezentace
Očekávaný výstup:	Student si dělá poznámky k probíranému tématu a průběžně řeší předkládané úlohy
Metodické poznámky:	Materiál – prezentace – je určen jako osnova výkladu nového učiva resp. pro účely opakování

Počítání s nevlastními hodnotami

Jaroslav Hajtmar

17.9.2013

Počítání s nevlastními hodnotami

Vlastní číslo x_0 (vlastní hodnota) libovolné číslo $x_0 \in \mathbb{R}$
Nevlastní čísla (nevlastní hodnoty) $-\infty \notin \mathbb{R}$ a $+\infty \notin \mathbb{R}$

Rozšíření množiny reálných čísel: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\pm\infty \notin \mathbb{R} \quad \text{ale} \quad \pm\infty \in \mathbb{R}^*$$

Nevlastní číslo $+\infty$ je vlastně hodnota nevlastní limity nějaké funkce, která v jistém okolí nějakého bodu (i nevlastního) roste nad všechny představitelné meze.
Nevlastní číslo $-\infty$ je vlastně hodnota nevlastní limity nějaké funkce, která v jistém okolí nějakého bodu (i nevlastního) klesá pod všechny představitelné meze.

Aritmetika nevlastních čísel

Nevlastní čísla $\pm\infty \notin \mathbb{R}$! Nelze s nimi počítat jak jsme zvyklí!
Jistá pravidla však existují a **navíc odpovídají intuici**:

Tato pravidla využíváme při praktickém výpočtu limit!

1. $$\infty + \infty = A + \infty = \infty + A = +\infty; \quad \forall A \in \mathbb{R}$$

2. $$-\infty + (-\infty) = A + (-\infty) = -\infty + A = -\infty; \quad \forall A \in \mathbb{R}$$

3. $$+\infty \cdot (+\infty) = -\infty \cdot (-\infty) = +\infty$$

4. $$A \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot A = \begin{cases} +\infty;\ A > 0 \\ 0;\ A = 0 \\ -\infty;\ A < 0 \end{cases}$$

5. $$A \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot A = \begin{cases} -\infty; \ A > 0 \\ 0; \ A = 0 \\ +\infty; \ A < 0 \end{cases}$$

6. $$\infty^{\alpha} = \begin{cases} +\infty; \ \alpha > 0 \\ 0; \ \alpha < 0 \end{cases}$$

7. $$\frac{A}{+\infty} = \frac{A}{-\infty} = 0; \quad \forall A \in \mathbb{R}$$

Úloha: Zapište ke pomocí limit ke každému typu (1 - 7) nějaký ukázkový příklad.

Jiné typy limit označujeme jako „neurčité výrazy“.

Neurčité výrazy

Limity následujících typů nelze přímo vypočítat! Pomocí úprav je převedeme na typy (1 - 7) a následně pomocí aritmetiky počítání s nevlastními čísly vyřešíme.

a) $\infty - \infty$

b) $\dfrac{\infty}{\infty}$

c) $\infty \cdot 0$

d) $\dfrac{0}{0}$

e) $\dfrac{A}{0}$

f) $\dfrac{\infty}{0}$

g) 1^{∞}

h) 0^{0}

i) ∞^{0}

Úloha: Uveďte k typům **a** – **g** ukázkový příklad.

Proč je $\infty - \infty$ neurčitý výraz?

$f(x)$	$g(x)$	$f(x) - g(x)$		
		typ limity v $+\infty$	hodnota	limita
$2x$	x	$\lvert\infty - \infty\rvert$	x	∞
$2x$	$2x$	$\lvert\infty - \infty\rvert$	0	0
$2x$	$2x + 1$	$\lvert\infty - \infty\rvert$	-1	-1
$2x$	$3x$	$\lvert\infty - \infty\rvert$	$-x$	$-\infty$
$2n$	$2n - (-1)^n$	$\lvert\infty - \infty\rvert$	$(-1)^n$	neexistuje

Proč je $\infty \cdot 0$ neurčitý výraz?

$f(x)$	$g(x)$	$f(x) \cdot g(x)$		
		typ limity v $+\infty$	hodnota	limita
x^2	$\frac{1}{x}$	$\lvert \infty \cdot 0 \rvert$	x	∞
x^2	$\frac{1}{x^2}$	$\lvert \infty \cdot 0 \rvert$	1	1
x^2	$\frac{1}{x^3}$	$\lvert \infty \cdot 0 \rvert$	$\frac{1}{x}$	0
x^2	$-\frac{1}{x}$	$\lvert \infty \cdot 0 \rvert$	$-x$	$-\infty$
n^2	$\frac{(-1)^n}{n}$	$\lvert \infty \cdot 0 \rvert$	$(-1)^n n$	neexistuje

Proč je $\frac{\infty}{\infty}$ neurčitý výraz?

$f(x)$	$g(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$ typ limity v $+\infty$	hodnota	limita
x^2	x	$\left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert$	x	∞
x^2	x^2	$\left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert$	1	1
x^2	x^3	$\left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert$	$\frac{1}{x}$	0
n^2	$n^{2-(-1)^n}$	$\left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert$	$n^{(-1)^n}$	nemá limitu

Proč je $\frac{\infty}{0}$ neurčitý výraz?

$f(x)$	$g(x)$	typ limity v $+\infty$	hodnota $\frac{f(x)}{g(x)}$	limita
x	$\frac{1}{x}$	$\left\lvert \frac{\infty}{0} \right\rvert$	x^2	∞
x	$-\frac{1}{x}$	$\left\lvert \frac{\infty}{0} \right\rvert$	$-x^2$	$-\infty$
n	$\frac{(-1)^n}{n}$	$\left\lvert \frac{\infty}{0} \right\rvert$	$(-1)^n n^2$	nemá limitu

Proč je např. $\frac{1}{0}$ neurčitý výraz?

$f(x)$	$g(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$		
		typ limity v $+\infty$	hodnota	limita
1	$\frac{1}{x}$	$\left\lvert \frac{1}{0} \right\rvert$	x	∞
1	$-\frac{1}{x}$	$\left\lvert \frac{1}{0} \right\rvert$	$-x$	$-\infty$
1	$\frac{(-1)^n}{n}$	$\left\lvert \frac{1}{0} \right\rvert$	$(-1)^n n$	nemá limitu

Použité materiály a zdroje

- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kuben J., Šarmanová P., Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: dp.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/dp.pdf>.
- Materiály k přednáškám, [online]. 2013 [cit. 2013-10-15]. Dostupný z WWW: <http://math.feld.cvut.cz/veronika/vyuka/blany112.htm>.
- Archiv autora