INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Analytická geometrie
Název učebního materiálu:	Vzdálenost bodu od přímky
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0108
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	3. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	19.2.2014
Datum ověření ve výuce:	23.5.2014
Druh učebního materiálu:	prezentace
Očekávaný výstup:	Student si dělá poznámky k probíranému tématu
Metodické poznámky:	Materiál je určen jako osnova výkladu nového učiva resp. pro účely opakování

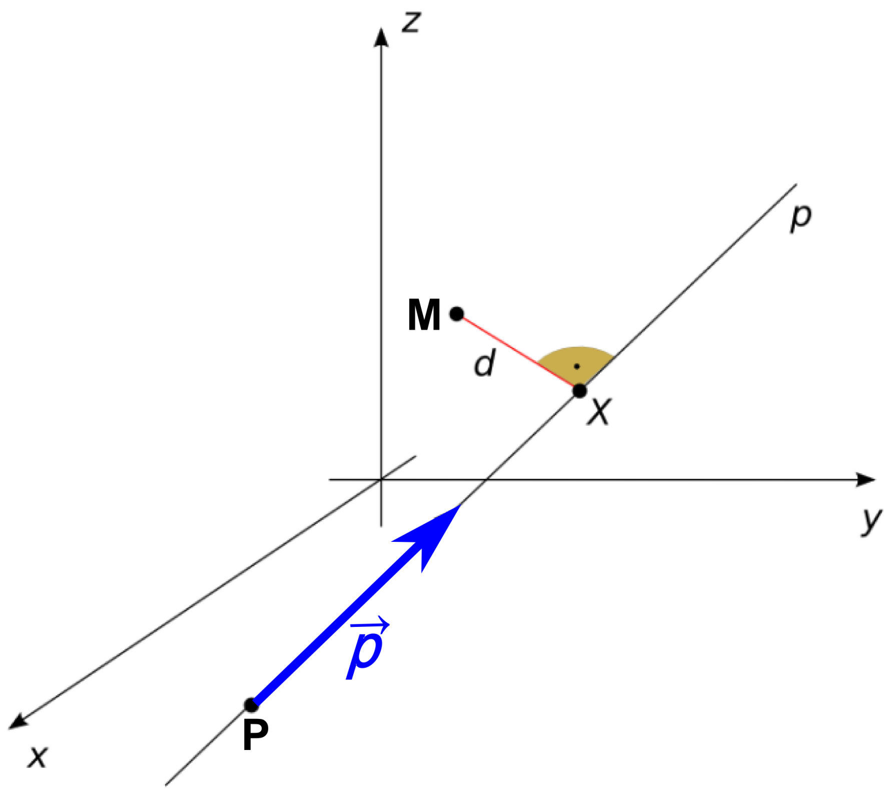
Vzdálenost bodu od přímky

Jaroslav Hajtmar

19.2.2014

Vzdálenost bodu od přímky v E_3

DEF. Vzdálenost bodu M od přímky p je vzdálenost bodu M od jeho pravoúhlého průmětu X do této přímky.



POZN 1:

V E_2 to lze udělat snadno, ale v E_3 to není tak jednoduché, neboť v trojrozměrném prostoru existuje nekonečně mnoho přímek (vesměs mimoběžek), které procházejí bodem M a jsou kolmé k zadané přímce p.

POZN 2:

Leží-li bod M na přímce p, pak je jeho vzdálenost od této přímky nulová.

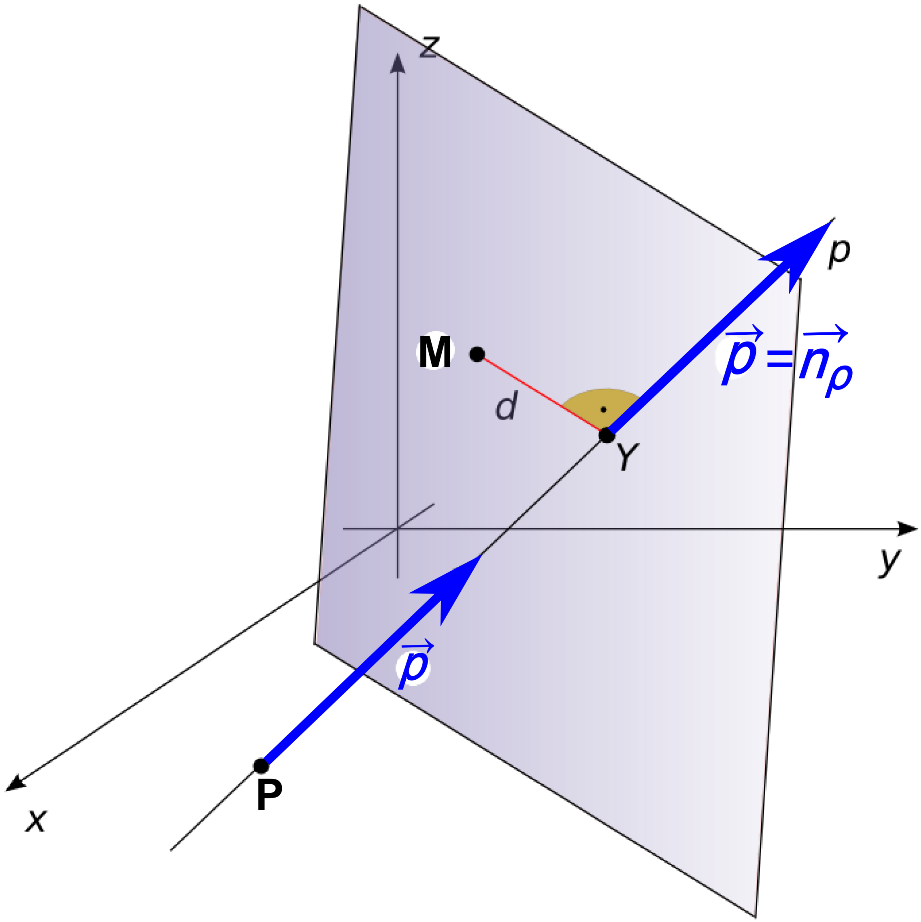
Při hledání paty kolmice spuštěné z bodu M k dané přímce p lze s úspěchem využít toho, že daným bodem M lze vést jedinou rovinu, která je kolmá k zadané přímce p.

Postup :

- $\rho;\ M \in \rho \wedge \rho \perp p$ (Bodem M vedeme rovinu kolmou k p).
- $Y;\ Y = p \cap \rho$ (Y – pata kolmice spuštěné z bodu M k přímce p).
- $|Mp| = |MY|$ (hledaná vzdálenost M od paty kolmice Y).

Analyticky lze kolmou rovinu nalézt velmi snadno, když si uvědomíme, že směrový vektor $\vec{p}$ přímky p, lze považovat za normálový vektor $\vec{n}_\rho$ roviny ρ, vedené bodem M k přímce p.

Vzdálenost bodu M od roviny ρ



Praktický výpočet

Zobecněním předchozího postupu pro daný bod M a danou přímku p by teoreticky šel odvodit vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky, nicméně vzorec je tak komplikovaný, že je prakticky nepoužitelný! Proto je třeba každou konkrétní úlohu řešit samostatně pomocí předchozího postupu tj.

Postup :

- $\rho;\ M \in \rho \wedge \rho \perp p$ (Bodem M vedeme rovinu kolmou k p).
- $Y;\ Y = p \cap \rho$ (Y – pata kolmice spuštěné z bodu M k přímce p).
- $|Mp| = |MY|$ (hledaná vzdálenost M od paty kolmice Y).

Úloha 1: Vypočítejte vzdálenost bodu $A\,[0,2,3]$ od přímky $p = \{[3+t,\ 5+2t,\ -t\ ]\,;\, t \in \mathbb{R}\}$.

Řešení:

1) $\rho;\, A \in \rho \wedge \rho \perp p$ (hledáme kolmou rovinu)

$\vec{p} = \vec{n}_\rho = (1,2,-1)$

$\rho\colon x + 2y - z + d = 0$

$A \in \rho\colon 0 + 4 - 3 + d = 0 \ \rightarrow d = -1$

$\rho\colon x + 2y - z - 1 = 0$

2) $Y;\, Y = p \cap \rho$ (hledáme patu kolmice)

$3 + t + 2 \cdot (5 + 2t) - (-t) - 1 = 0 \quad \rightarrow t = -2$

$Y = [1,1,2]$

3) $|Ap| = |AY|$ (hledáme vzdálenost bodu A od paty kolmice Y)

$\overrightarrow{AY} = Y - A = (1,-1,-1)$

$|\overrightarrow{AY}| = |Ap| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}\,j$

Vzdálenost bodu A od přímky p je $\sqrt{3}\,j$.

Úloha 2:

V trojúhelníku ABC vypočítejte výšku v_a, znáte-li souřadnice bodů $A\,[1, 2, 3]$, $B\,[3, 6, 2]$, $C\,[-1, 10, -2]$.

Úloha 3:

Je dána přímka $p = \{[2 + k,\ 1 - k,\ 1 - k\ ]\,; k \in \mathbb{R}\}$. Na ose o_x najděte bod X tak, aby jeho vzdálenost od přímky p byla 2j.

Úloha 4:

Promyslete si, jak by šla nejsnáze určit vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_3.

Úloha 5:

Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných přímek:

$p = \{[1 - t,\ 1 + 2t,\ -t\ ]\,;\, t \in \mathbb{R}\}$

$q = \{[2 + k,\ 1 - 2k,\ 2 + k\ ]\,;\, k \in \mathbb{R}\}$

DOMÁCÍ ÚLOHA:

Petáková – str. 120, cv. 63, 65

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Archiv autora