INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Nevlastní integrál vlivem meze
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0318
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	18.2.2014
Datum ověření ve výuce:	19.3.2014
Druh učebního materiálu:	prezentace
Očekávaný výstup:	Student si dělá poznámky k probíranému tématu a průběžně řeší předkládané úlohy
Metodické poznámky:	Materiál – prezentace – je určen jako osnova výkladu nového učiva resp. pro účely opakování

Nevlastní integrál vlivem meze

Jaroslav Hajtmar

18.2.2014

Nevlastní integrály

Omezující předpoklady Riemanova integrálu:

- Integrační obor je konečný uzavřený interval $\langle a, b \rangle$.
- Integrovaná funkce $f(x)$ je na tomto intervalu ohraničená.

Integrály definované za těchto předpokladů – tzv. **vlastní integrály**.

Tato omezení lze jednoduchými úvahami odstranit!

Nevlastní integrál na neohraničeném intervalu

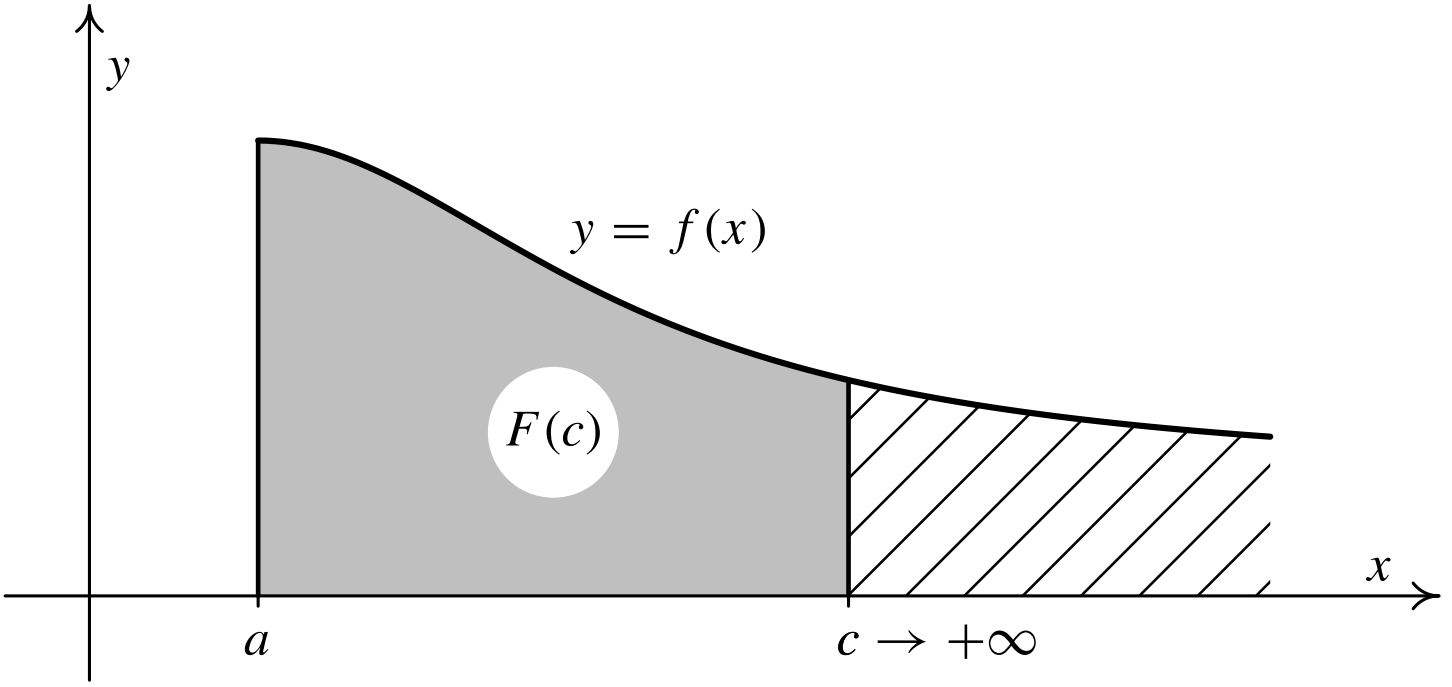
neboli **integrál nevlastní vlivem (neomezenosti) meze** – nevlastní integrály 1. druhu.

Uvažujme funkci $f(x)$, definovanou na intervalu $\langle a, +\infty)$. Předpokládejme, že $\forall c \in \langle a, +\infty)$ existuje určitý integrál $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad c \geq a$$

Pojďme nyní neomezeně zvětšovat horní mez c a sledovat, jak se chová veličina $F(c)$.

Integrál jako funkce horní meze



Interpretace obrázku

Velikost šedé plochy je funkční hodnota funkce $F(c)$ tj. hodnota integrálu $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$. Při posouvání meze $c \to \infty$ mohou nastat tyto možnosti:

- velikost šedé plochy (tj. hodnota tohoto integrálu) se blíží k nějakému konečnému číslu L (tj. existuje konečná limita funkce $F(c)$)
- velikost plochy roste nade všecky meze (tj. limita funkce $F(c)$ je nevlastní)
- hodnota obsahu plochy neexistuje (tj. hodnota osciluje a limita funkce $F(c)$ vůbec neexistuje).

Definice nevlastního integrálu 1. druhu

DEF. Je-li funkce $f(x)$ spojitá pro všechna čísla $c \geq a$, pak integrál tvaru $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme **nevlastní integrál prvního druhu** (na nekonečném intervalu) a přiřazujeme mu hodnotu rovnu limitě

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty} \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = L$$

Je-li L konečné číslo, říkáme, že uvažovaný nevlastní integrál je konvergentní, v opačném případě, tj. když limita je nevlastní (tj. $\mathrm{L} = +\infty$ nebo $\mathrm{L} = -\infty$) nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál je divergentní.

Úloha 1:

Vypočítejte nevlastní integrál $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$

$$F(c) = \int_0^c \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^c = \operatorname{arctg} c - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} c,$$

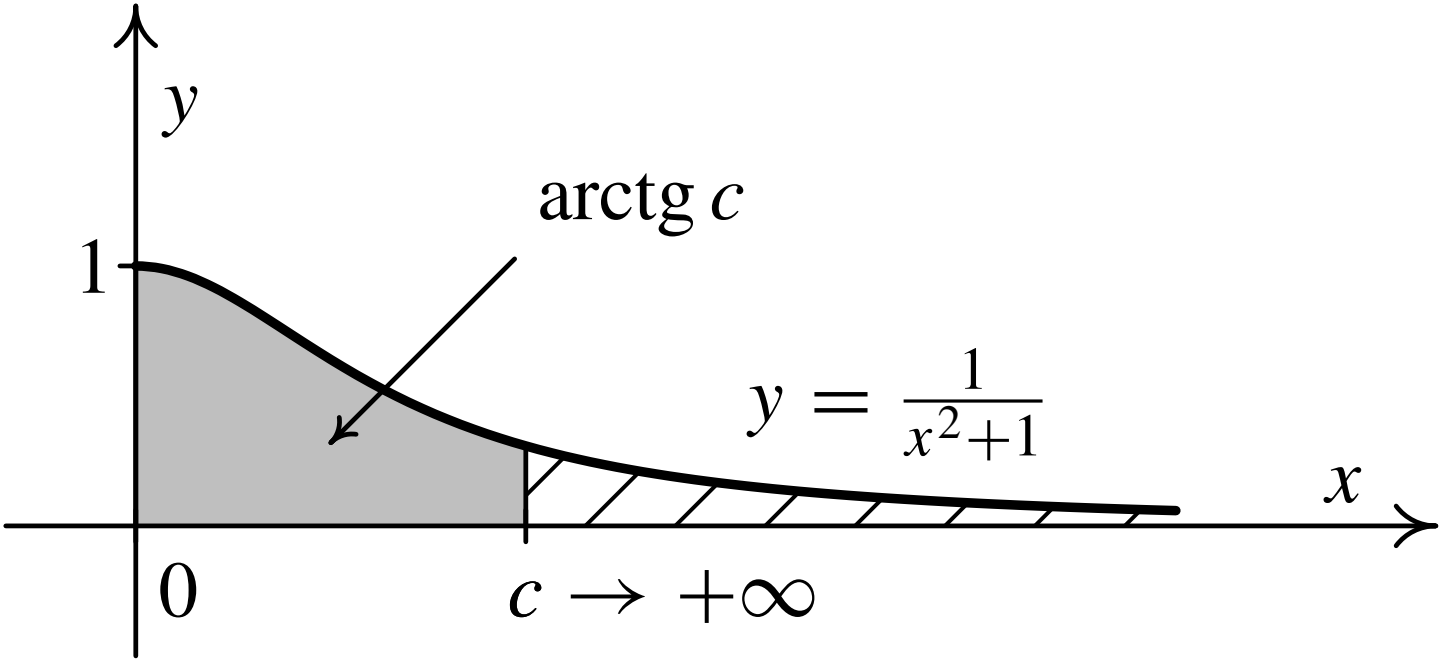
$$\lim_{c\to+\infty} F(c) = \lim_{c\to+\infty} \operatorname{arctg} c = \frac{\pi}{2}\,.$$

Závěr: Zadaný integrál konverguje a platí

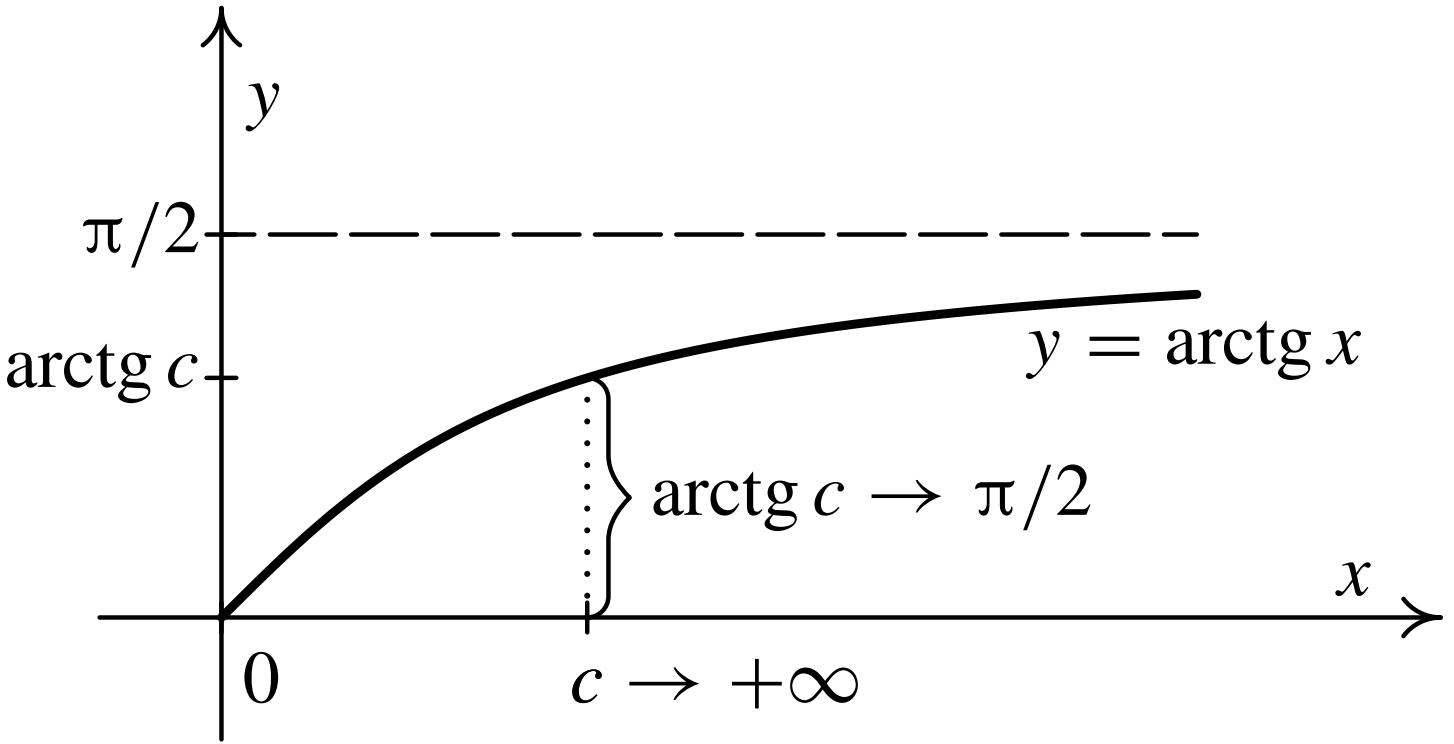
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

Zakreslete graf funkce $y = \operatorname{arctg} x$, vyšetřete omezenost a porovnejte s výsledkem.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$$



$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$$



Úloha 2:

Vypočítejte nevlastní integrál $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

$$F(c) = \int_1^c \frac{\mathrm{d}x}{x} = \left[\ln x\right]_1^c = \ln c - \ln 1 = \ln c,$$

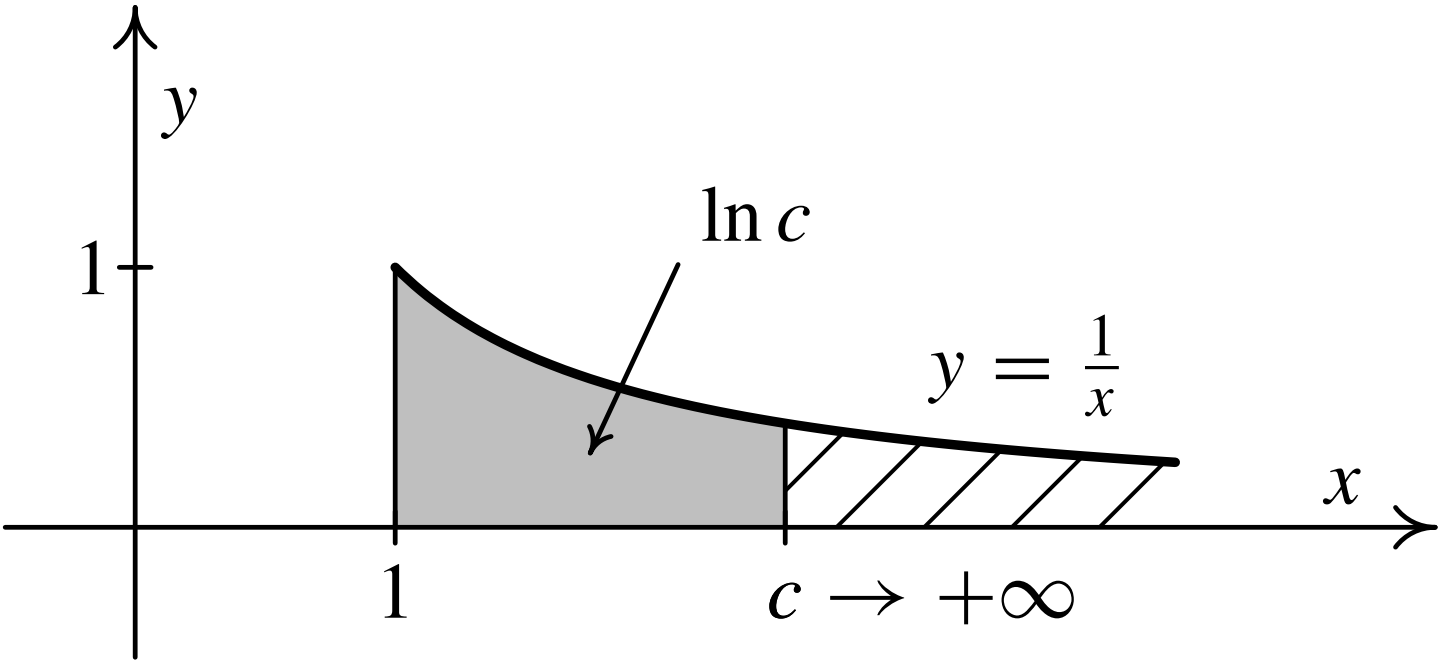
$$\lim_{c \to +\infty} F(c) = \lim_{c \to +\infty} \ln c = +\infty.$$

Závěr: Zadaný integrál diverguje.

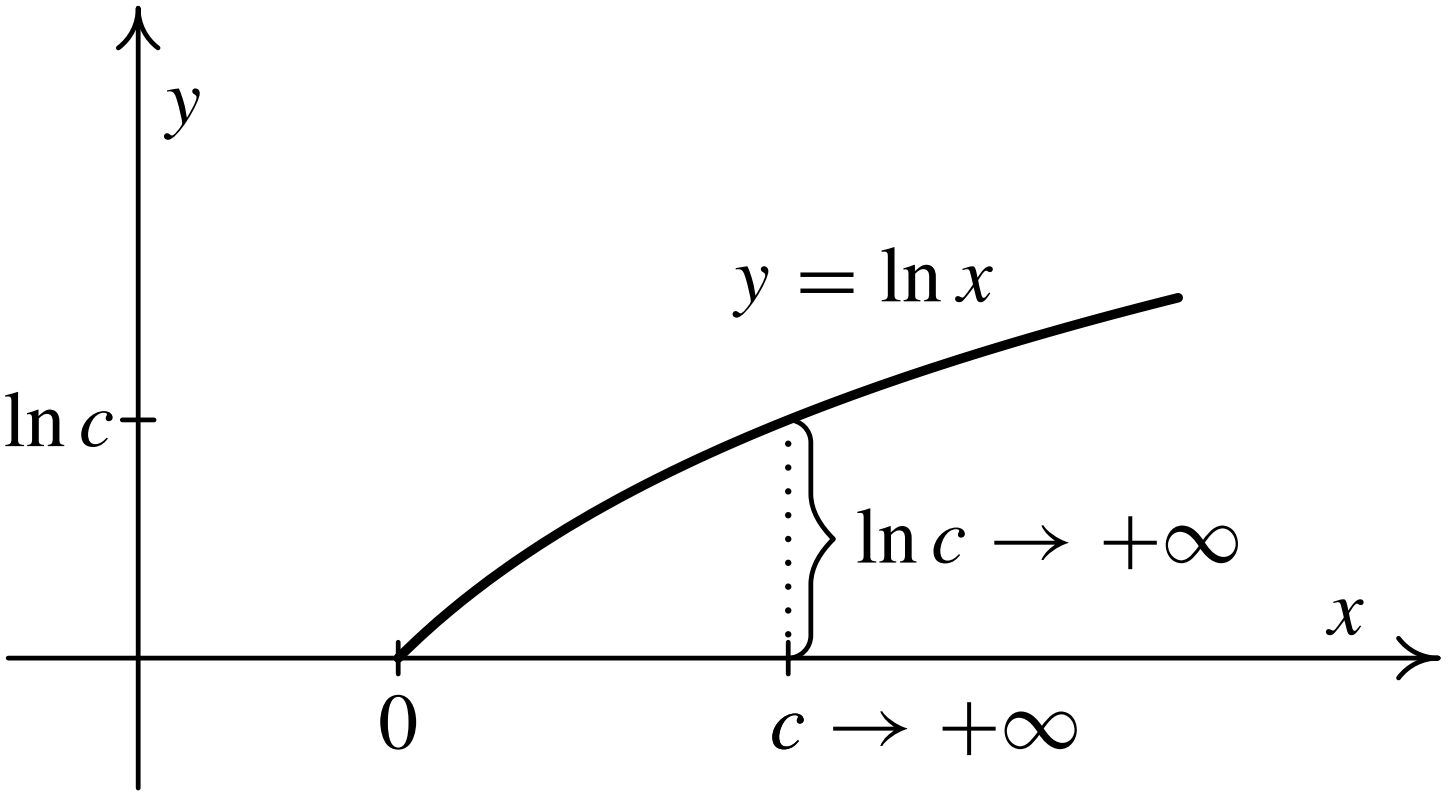
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = +\infty$$

Zakreslete graf funkce $y = \ln x$, vyšetřete omezenost a porovnejte s výsledkem.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$



$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$



Úloha 3:

Vypočítejte nevlastní integrál $\int\limits_0^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$

$$F(c) = \int_0^c \sin x \, \mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_0^c = -\cos c + \cos 0 = 1 - \cos c,$$

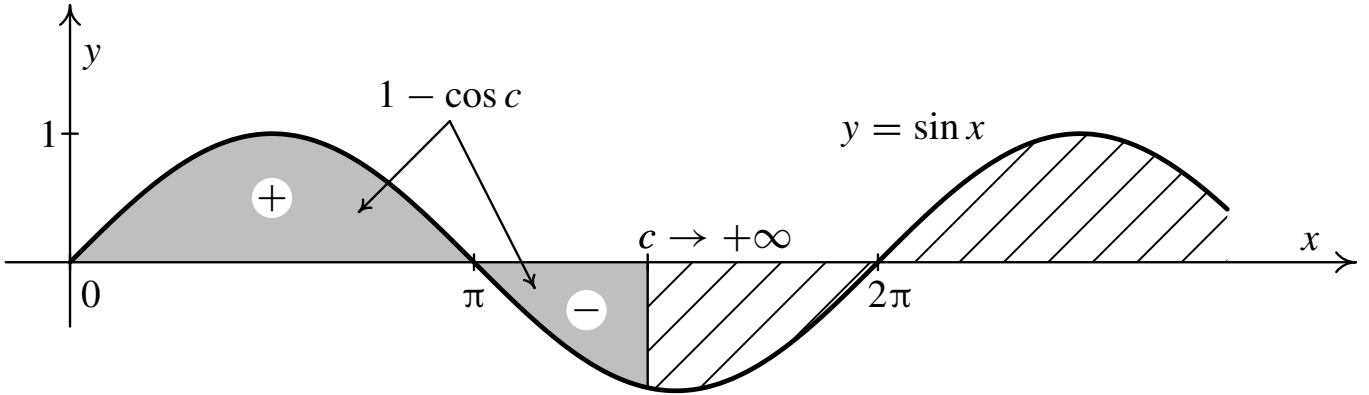
$$\lim_{c \to +\infty} F(c) = \lim_{c \to +\infty} (1 - \cos c) \qquad \text{neexistuje.}$$

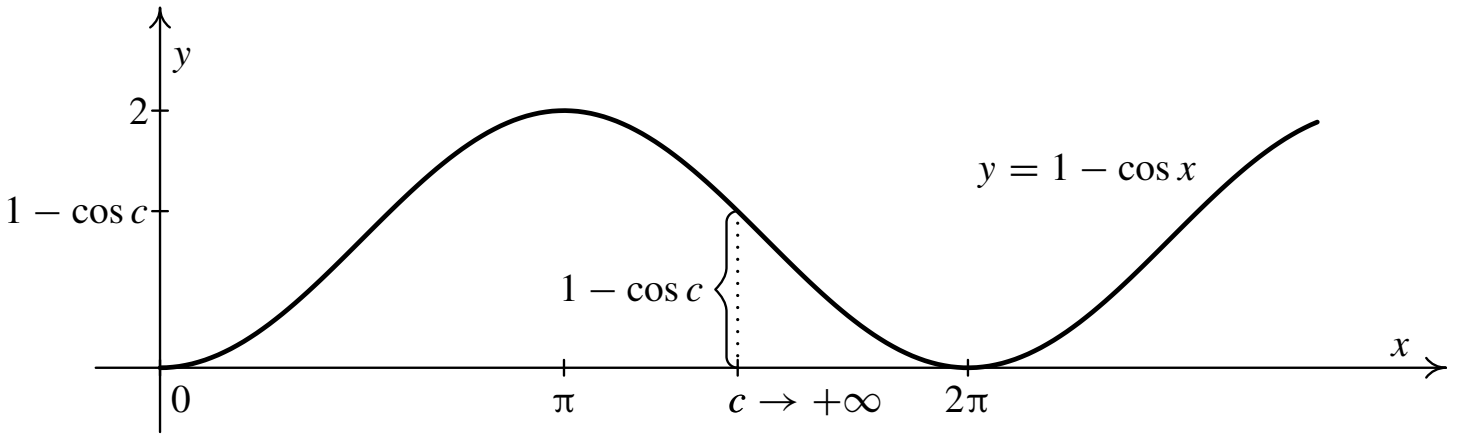
Závěr: Zadaný integrál diverguje.

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x \qquad \textit{neexistuje}$$

Zakreslete graf funkce $y = 1 - \cos x$, vyšetřete omezenost a porovnejte s výsledkem.

$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ neexistuje





Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kreml P., Vlček J., Volný P., Krček J., Poláček J., Matematika II [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. Dostupné z WWW: <http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/>
- Archiv autora