INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Objem rotačního tělesa
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0314
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	6.2.2014
Datum ověření ve výuce:	5.3.2014
Druh učebního materiálu:	prezentace
Očekávaný výstup:	Student si dělá poznámky k probíranému tématu a průběžně řeší předkládané úlohy
Metodické poznámky:	Materiál – prezentace – je určen jako osnova výkladu nového učiva resp. pro účely opakování

Objem rotačního tělesa

Jaroslav Hajtmar

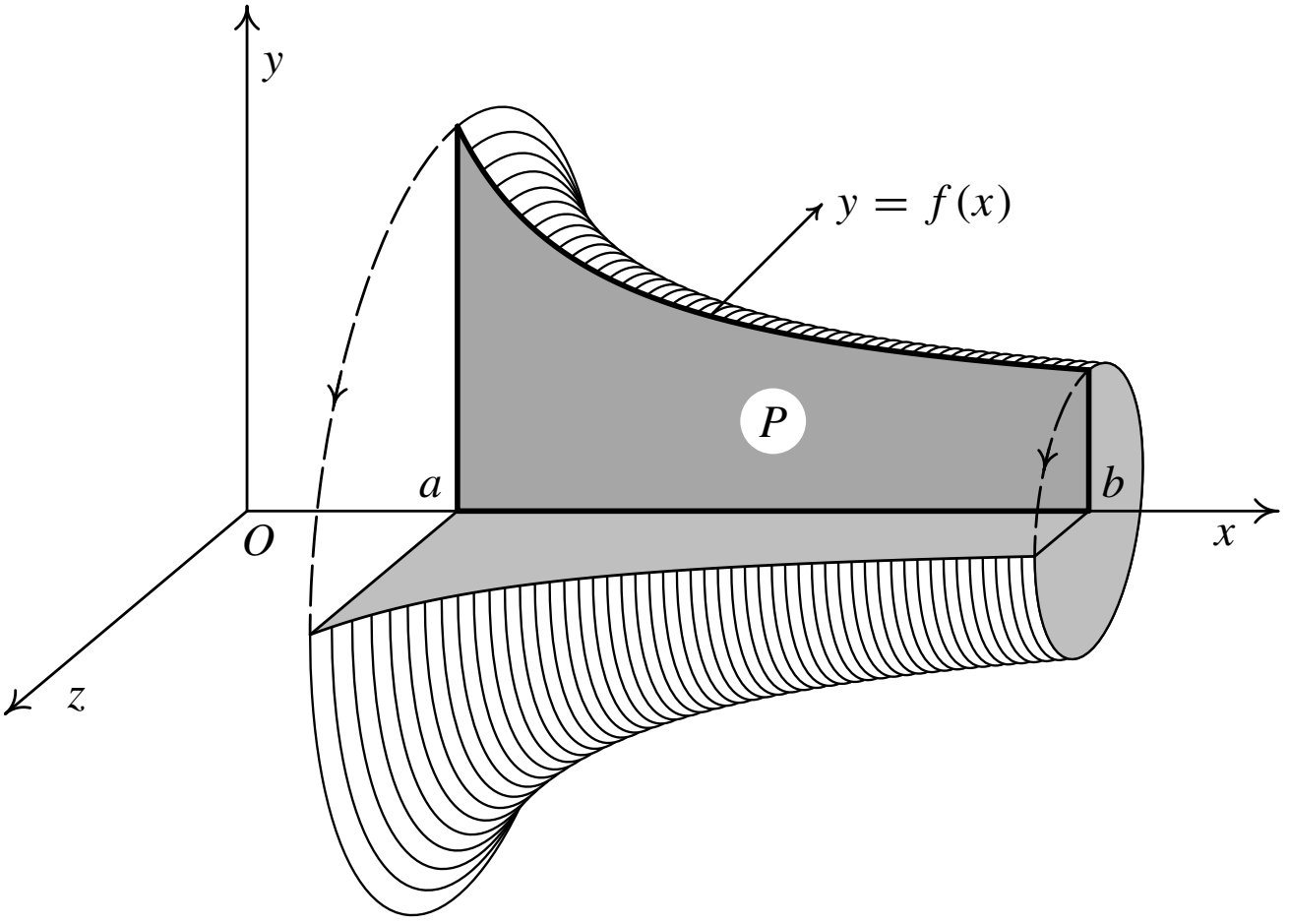
6.2.2014

Objem rotačního tělesa

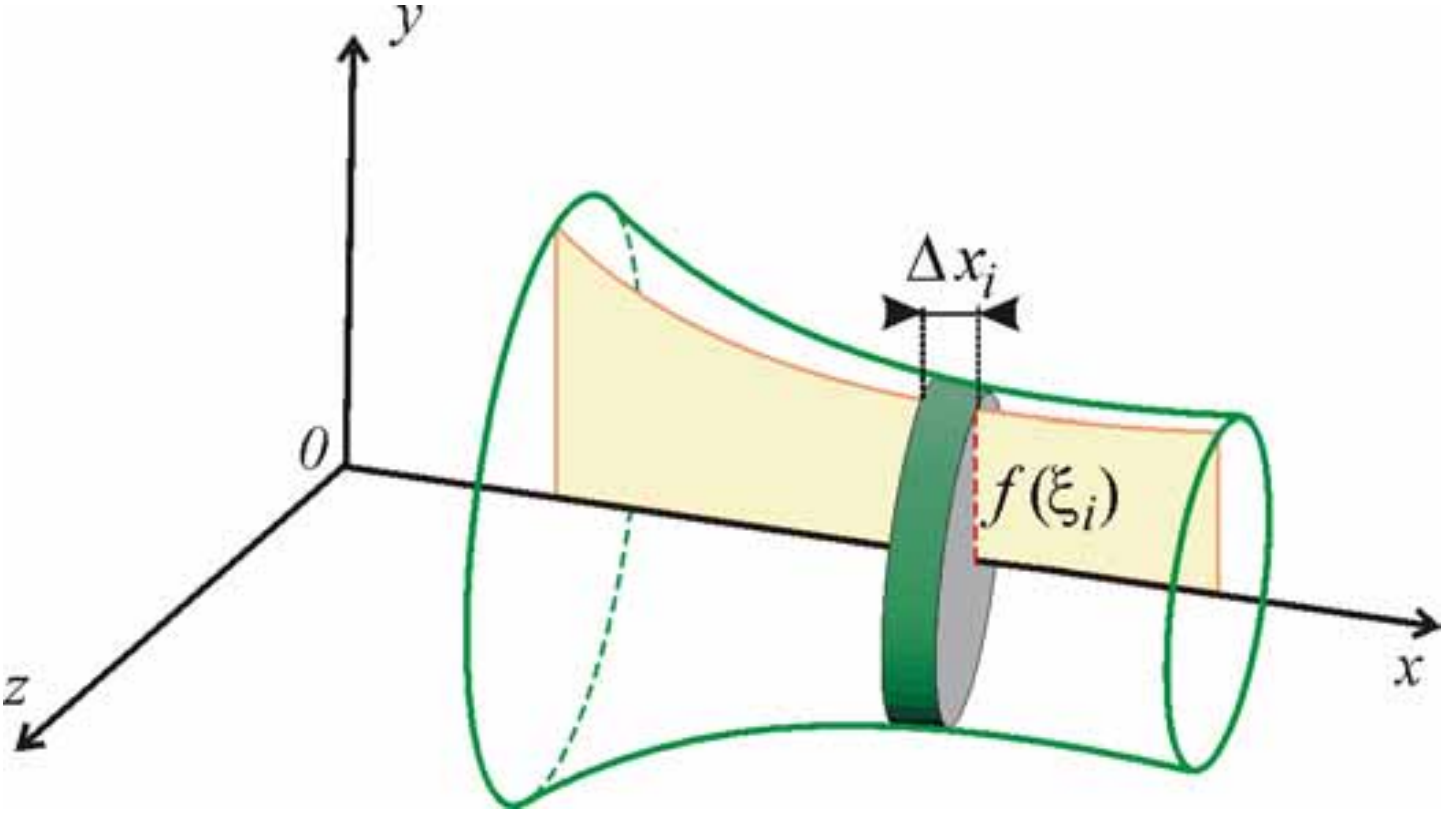
Princip:

- Rozřežeme těleso na „plátky“ a ty pak nahradíme vepsanými nebo opsanými válečky.
- Aproximace objemu tělesa závisí na charakteru funkce a na počtu vepsaných či opsaných válečků.
- Postupně zjemňujeme dělení intervalu – aproximace vepsanými válečky se zvětšuje, opsanými válečky se zmenšuje.
- Objem každého „objemového elementu“ je kladné reálné číslo.
- Objemové elementy (kladná čísla jako v případě aproximace obsahů ploch) sečteme pomocí určitého integrálu.

Rozřežeme rotační těleso na „plátky“



Objemový element



Objemový element:

Váleček o poloměru podstavy $f(\xi_i)$ a výšce Δx_i

Objem elementu je:

$\Delta V_i = \pi \cdot f^2(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

Objem celého tělesa

Přibližně roven součtu objemů jednotlivých plátků (válečků) tj:

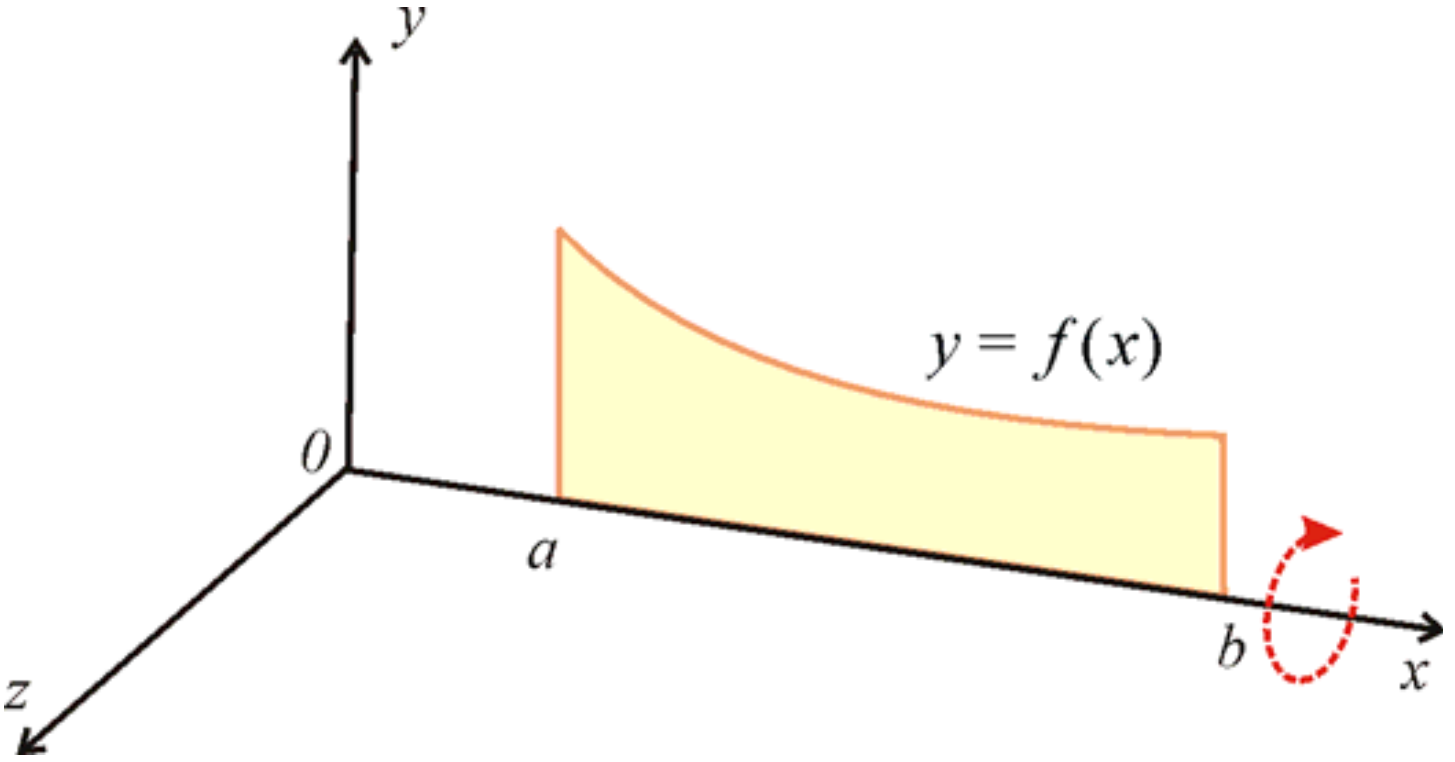
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f^2(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Zjemňujme dělení

Čím bude dělení intervalu jemnější, tím méně se bude součet objemů plátků lišit od objemu daného tělesa.

Objem definujeme jako limitu tohoto součtu pro $n \to \infty$, když zároveň všechny délky $\Delta x_i \to 0$

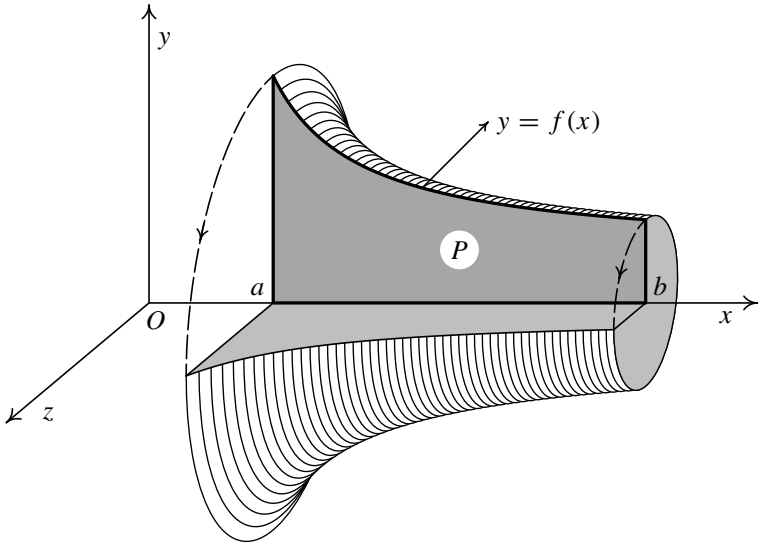
Rotace křivočarého lichoběžníka kolem o_x



Objem rotačního tělesa

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, zleva přímkou $x = a$, zprava přímkou $x = b$ a zdola osou o_x, kolem osy o_x, má objem:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

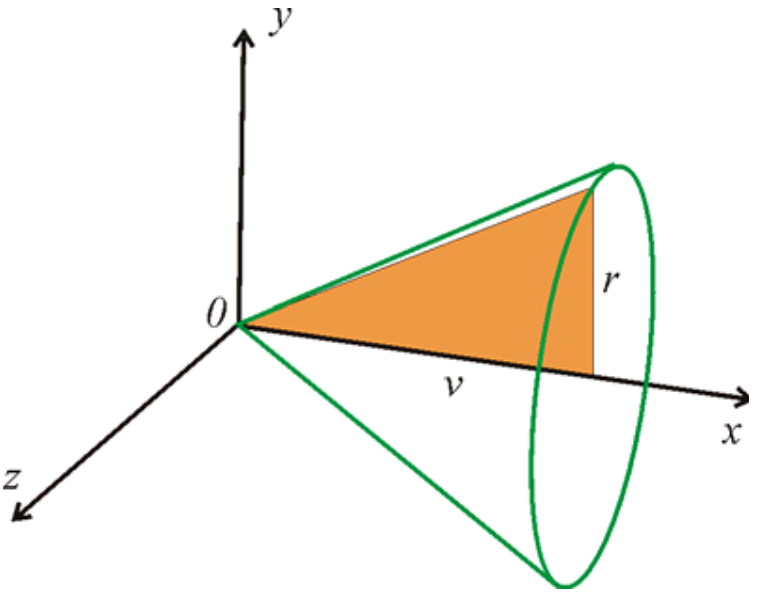


Odvození základních vzorců

Úloha:

Ověřte základní vzorec pro objem kužele s podstavou o poloměru r a výškou v.

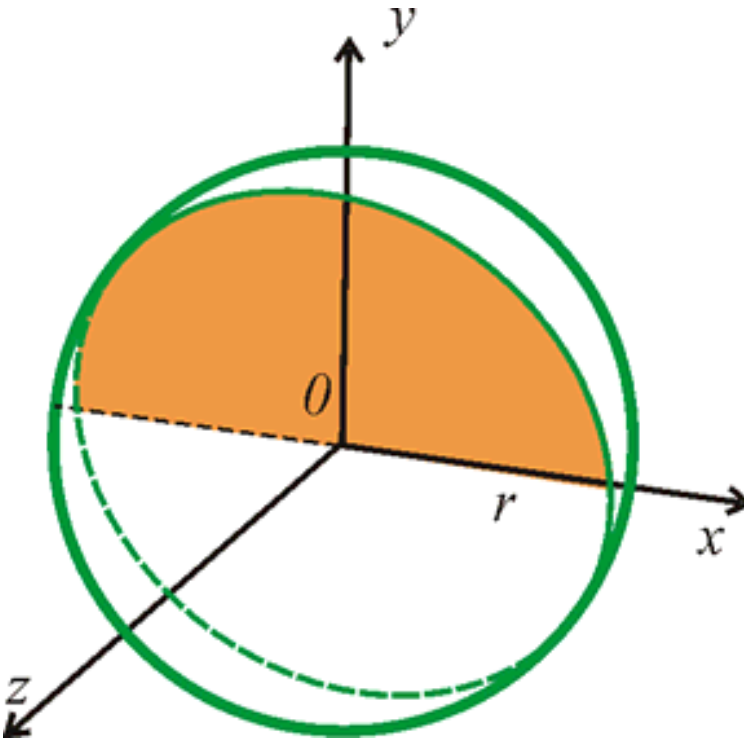
Návod: Umístěte do souřadné soustavy vhodně přímku, jejíž rotací kolem osy o_x na jistém intervalu vznikne požadovaný kužel.



Úloha:

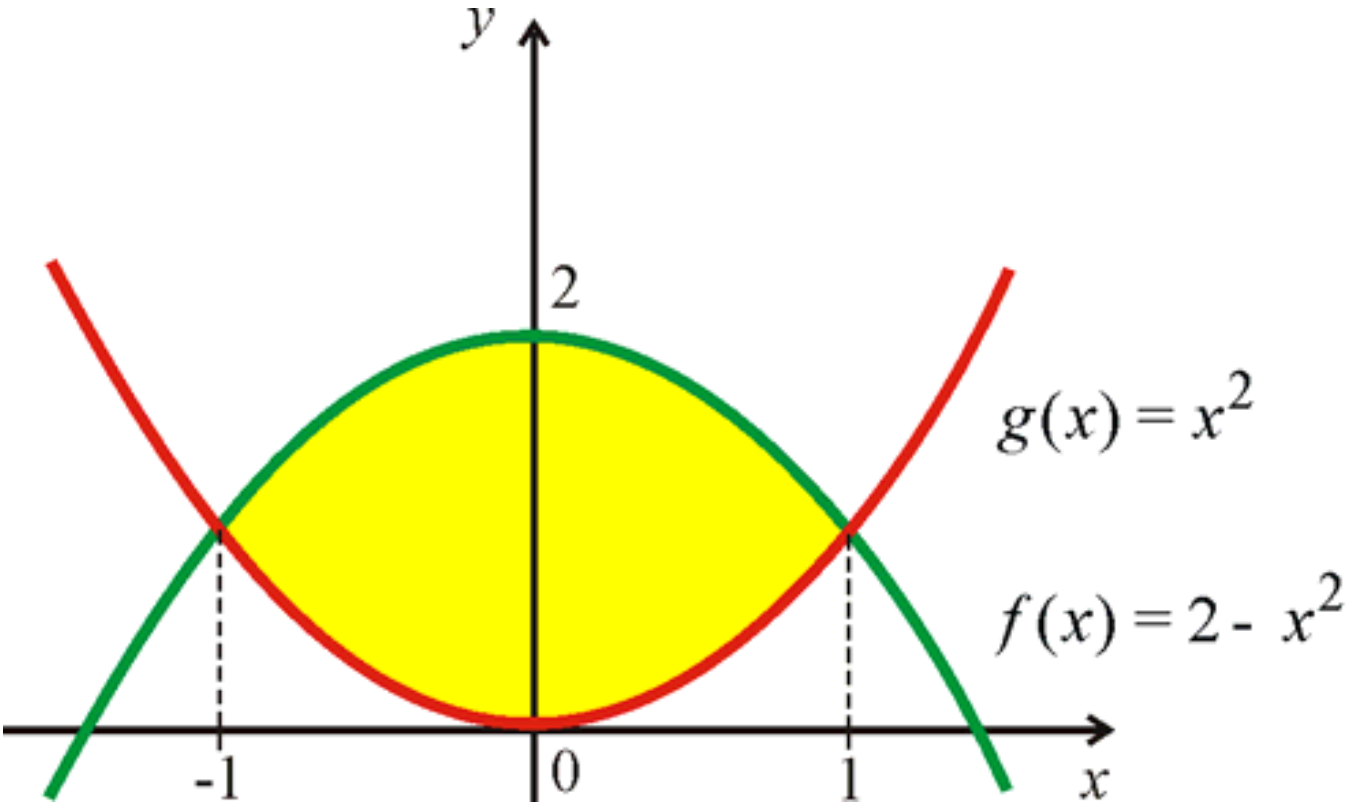
Ověřte základní vzorec pro objem koule o poloměru r.

Návod: Umístěte do souřadné soustavy vhodně kružnici, jejíž rotací kolem osy o_x na jistém intervalu vznikne požadovaná koule.

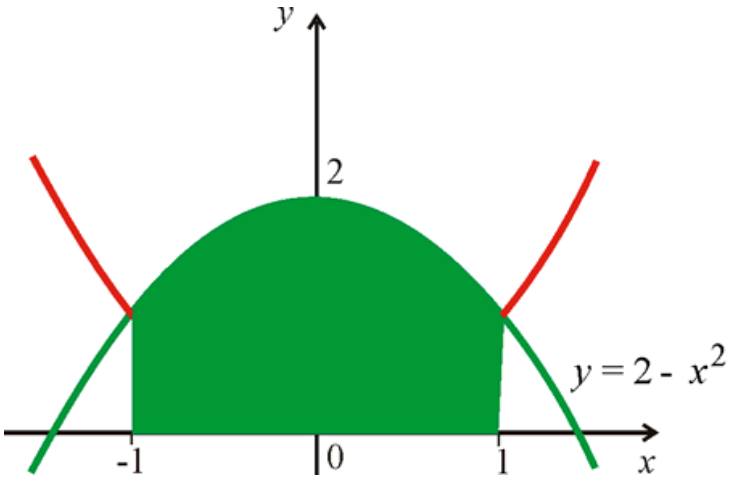


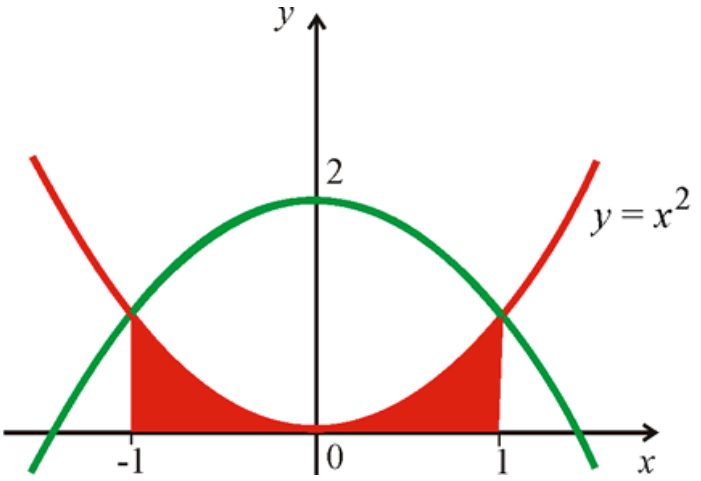
Úloha:

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $y = x^2$ a $y = 2 - x^2$ kolem osy o_x.



Odečtením objemů získáme požadované těleso





$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2\right)^2 dx \quad - \quad \pi \int_{-1}^{1} \left(x^2\right)^2 dx$$

Výpočet objemu

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx - \pi \int_a^b g^2(x)dx = \pi \int_{-1}^{1} (2-x^2)^2 dx - \pi \int_{-1}^{1} (x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} \left[(2-x^2)^2 - (x^2)^2 \right] dx =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left[(4-4x^2+x^4) - x^4 \right] dx = \pi \int_{-1}^{1} (4-4x^2)\, dx = 4\pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = 8\pi \int_0^1 (1-x^2) dx =$$

$$= 8\pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 8\pi \left[1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{16}{3}\pi \,.$$

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kreml P., Vlček J., Volný P., Krček J., Poláček J., Matematika II [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. Dostupné z WWW: <http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/>
- Archiv autora