INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Substituce v určitém integrálu
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0311
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	27.1.2014
Datum ověření ve výuce:	24.2.2014
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě předložených vztahů zvládne počítat určité integrály substituční metodou.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o integrálech. Může být použit k získání klasifikace.

Určitý integrál – substituční metoda

I při výpočtu určitých integrálů lze použít substituční metodu. Při výpočtu neurčitého integrálu se v závěru výpočtu musel výsledek převést do původní proměnné. Výhodou substituční metody v určitém integrálu je, že s pomocí substituční rovnice se „přepočítají“ meze určitého integrálu (nové meze odpovídají nové proměnné), a tím pádem se nebudeme muset v závěru vracet k původní proměnné a původním mezím. Ještě připomeneme, že metodu používáme k řešení integrálů, v nichž se integrovaná funkce dá rozložit na součin dvou činitelů, přičemž prvním činitelem je nějaká složená funkce a druhým činitelem je derivace této složené funkce. Jednoduše to lze provést zejména při substitucích za lineární funkci, jakožto složky nějaké složené funkce.
Princip metody si předvedeme na několika konkrétních příkladech.

Příklad 1: Vypočítejte určitý integrál $\int\limits_0^1 x(x^2-1)^3\,\mathrm{d}x$

Řešení:
Příklad budeme řešit substitucí $x^2-1=t$. Staré meze jsou pro proměnnou x, takže je do této rovnice dosadíme postupně za x a dostaneme hodnoty nových mezí pro proměnnou t (pokud by byl vztah složitější, muselo by se t osamostatnit). Pro dolní mez to bude $0^2-1=-1$, pro horní $1^2-1=0$. Vzniklý integrál vypočítáme pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule. Celý výpočet bude vypadat takto:

$$\int_0^1 x(x^2-1)^3\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^2-1=t \\ 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow -1,\ 1 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = \int_{-1}^0 \frac{1}{2}t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{8}.$$

Příklad 2: Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$

Řešení:
Tentokrát použijeme substituci $\sin x=t$. Pro novou dolní mez vyjde $\sin\pi=0$ a pro novou horní mez vyjde $\sin 2\pi=0$. Výpočet tedy bude velmi krátký:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin x=t \\ \cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ \pi \rightsquigarrow 0,\ 2\pi \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = \int_0^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Příklad 3: Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos^2 x}{\sqrt[4]{1+\cos^3 x}}\cos x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Ověřte svůj výpočet:

Zvolíme substituci $1+\cos^3 x$. Pro novou dolní mez vyjde $1+\cos^3 0 = 1+1^3 = 2$ a pro novou horní mez vyjde $1+\cos^3 \frac{\pi}{2} = 1+0^3 = 1$, takže nová dolní mez je větší než nová horní mez. Použijeme tudíž rozšíření ze vztahu (3.14) a obrátíme meze. Postupně dostaneme

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos^2 x}{\sqrt[4]{1+\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 1+\cos^3 x = u \\ -3\cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\,\mathrm{d}u \\ 0 \rightsquigarrow 2,\ \pi/2 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \int_2^1 \frac{-1/3}{\sqrt[4]{u}}\,\mathrm{d}u =$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}\right)\int_1^2 u^{-1/4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{3/4}}{3/4}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{u^3}\right]_1^2 = \frac{4}{9}\left(\sqrt[4]{8}-1\right).$$

Podle předchozích návodů vypočítejte substituční metodou určité integrály:

Úloha 1. $\int\limits_1^2 \frac{2(1+\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x =$

Úloha 2. $\int\limits_0^3 \frac{3x}{\sqrt{4x+4}}\,\mathrm{d}x =$

Úloha 3. $\int\limits_0^4 12\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x =$

Úloha 4. $\int\limits_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x =$

Úloha 5. $\int\limits_0^\pi \sin t\sqrt{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$

Úloha 6. $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} =$

Úloha 7. $\int\limits_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$

Výsledky úloh

1. $\ln^2 2 + 2\ln 2$
2. 4
3. $17\sqrt{17} - 1$
4. $4 - \pi$
5. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$
6. $\arcsin \ln 2$
7. $4 - 2\ln 3$

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Hošková Š., Kuben J., Račková P., Integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: ip.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/ip.pdf>.
- Archiv autora