evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Integrální počet
Název učebního materiálu:	Substituce vedoucí k řešení integrálu vedoucího k výsledku arctg x
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0304
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	7.1.2014
Datum ověření ve výuce:	27.1.2014
Druh učebního materiálu:	prezentace
Očekávaný výstup:	Student si dělá poznámky k probíranému tématu a průběžně řeší předkládané úlohy
Metodické poznámky:	Materiál – prezentace – je určen jako osnova výkladu nového učiva resp. pro účely opakování

Substituce vedoucí k řešení integrálu vedoucího k výsledku arctg x

Jaroslav Hajtmar

7.1.2014

Integrály vedoucí k výsledku typu arctg

Ovládáme:

a) Základní tabulkový vzorec $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$

b) Základní úpravy integrálů (vytýkání před integrál atd.)

c) Substituční metodu (substituce za lineární funkci)

Jak vypočítat integrál typu:

$$\int \frac{1}{ax^2+1}\,\mathrm{d}x = \ ???$$

Řešme konkrétní příklad:

Návod: Upravme a zaveďme substituci

$$\int \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(2x)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} 2x = & t \\ 2\,\mathrm{d}x = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \ldots$$

…dopočítejte samostatně!

Zkusme ještě jeden příklad:

$$\int \frac{1}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(\sqrt{3}x\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sqrt{3}x = t \\ \sqrt{3}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \ldots$$

…dopočítejte samostatně!

Úkol:

Odvoďte obecný vzorec pro integrál $\int \frac{1}{ax^2+1}\,\mathrm{d}x$

Návod:

$$\int \frac{1}{ax^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(\sqrt{a}x\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

…dopočítejte samostatně!

A jak vypočítat integrál typu:

$$\int \frac{1}{x^2 + a}\,\mathrm{d}x = \;???\qquad (a > 0)$$

Řešme konkrétní příklad $\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x =$

Návod: Vytkněme, upravme a zaveďme substituci

$$\int \frac{1}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4 \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\left| \begin{array}{rcl} \frac{x}{2} & = & t \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \ldots$$

…dopočítejte samostatně!

Zkusme ještě jeden příklad:

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3\cdot\left(\frac{1}{3}x^2+1\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\left| \begin{array}{c} \dfrac{x}{\sqrt{3}} = t \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \ldots$$

…dopočítejte samostatně!

Úkol:

Odvoďte obecný vzorec pro integrál $\int \frac{1}{x^2+a}\,\mathrm{d}x \qquad (a > 0)$

Návod:

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a \cdot \left(\frac{1}{a}x^2+1\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\left|\begin{array}{rcl} \frac{x}{\sqrt{a}} & = & t \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array}\right| = \dots$$

...dopočítejte samostatně!

Úkol:

S využitím obratů z předchozích odvoďte obecný vzorec pro integrál:

$$\int \frac{1}{ax^2 + b}\,\mathrm{d}x \qquad (a \cdot b > 0)$$

…dopočítejte samostatně!

Úkol:

Vypočítejte samostatně s využitím obratů z předchozích příkladů a s použitím úpravy **doplnění na čtverec** následující integrály:

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{3x^2 + 2x + 1}\,\mathrm{d}x =$$

Pokuste se odvodit obecný vzorec pro integrál:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \qquad (b^2 - 4ac < 0)$$

Použité materiály a zdroje

- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora