



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Aplikace derivací – monotonnost
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0215
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	22.11.2013
Datum ověření ve výuce:	27.11.2013
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě předložených vztahů zvládne určovat intervaly monotonnosti.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o derivacích. Může být použit k získání klasifikace.

Aplikace derivací – vyšetřování monotonnosti funkce

Ve 2. ročníku jsme se učili definici monotonie resp. ryzí monotonie. Ověřování monotonie pouze na základě definice však může být velmi pracné. Ukážeme si efektivnější způsob jejího zjišťování. O monotonii funkce na určitém intervalu rozhodneme na základě znalosti znaménka první derivace funkce na tomto intervalu. Využijeme k tomu následující větu bez důkazu:

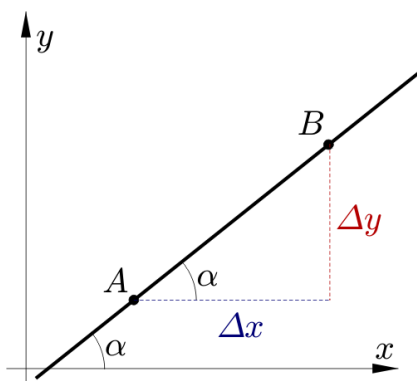
Nechť funkce $f: y = f(x)$ má na intervalu (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$ derivaci.

Jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí, že :

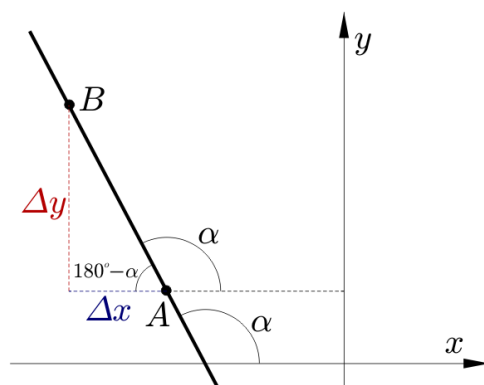
- a) $f'(x) > 0$, pak je f na (a, b) **rostoucí**.
- b) $f'(x) \geq 0$, pak je f na (a, b) **neklesající**.
- c) $f'(x) < 0$, pak je f na (a, b) **klesající**.
- d) $f'(x) \leq 0$, pak je f na (a, b) **nerostoucí**.
- e) $f'(x) = 0$, pak je f na (a, b) **konstantní**.

Geometrický význam derivace:

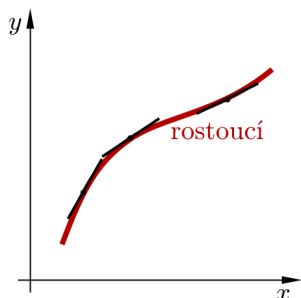
Derivace funkce v daném bodě určuje směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě. Obrázky ukazují, souvislost mezi hodnotou směrnice (a tím pádem velikostí směřového úhlu) tečny a derivací funkce v daném bodě.



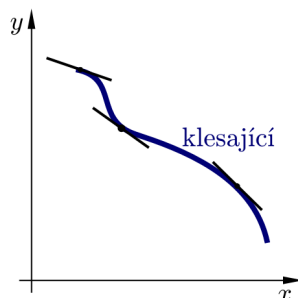
$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



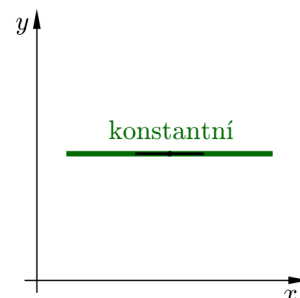
$$k = \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{\Delta y}{\Delta x}$$



hodnota derivace
je kladná



hodnota derivace
je záporná



hodnota derivace
je nula

Příklad 1: Užitím předchozí věty dokažte, že funkce f , g , h jsou rostoucí na svých definičních oborech.

a) $f: y = e^x$

b) $f: y = \operatorname{arctg} x$

c) $f: y = \ln x$

Řešení 1:

- a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$. Platí, že $e^x > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, tj. $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce f je tedy rostoucí na $D(f)$.
- b) $D(g) = \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Platí, že $\frac{1}{x^2+1} > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, tj. $g'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce g je tedy rostoucí na $D(g)$.
- c) $D(h) = (0, \infty)$, $h'(x) = \frac{1}{x}$. Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí, že $\frac{1}{x} > 0$, tj. $h'(x) > 0$.
Funkce h je tedy rostoucí na $D(h)$. ▲

Podle předchozích návodů určete maximální intervaly monotonnosti funkce.

Úloha 1. $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x$

Úloha 2. $y = x^4 - 6x^2 - 8x - 3$

Úloha 3. $y = x + \frac{1}{x}$

Úloha 4. $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 1}$

Úloha 5. $y = x \cdot \sqrt{x-1}$

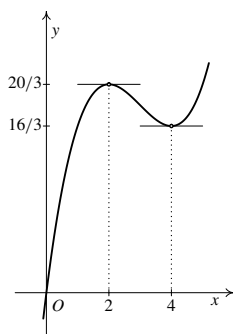
Úloha 6. $y = \frac{1-2x^2}{x^2+3}$

Úloha 7. $y = x^2 \cdot e^x$

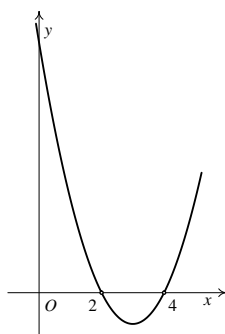
Úloha 8. $y = \sqrt{\frac{x-6}{4-x}}$

Výsledky úloh

1. Funkce je ↗ na $(-\infty, 2)$ a dále na $\langle 4, +\infty)$.
Funkce je ↘ na $\langle 2, 4)$. Prostudujte následující
obrázky a posuďte souvislost mezi oběma grafy.



a) Graf funkce
 $f(x) = x^3/3 - 3x^2 + 8x$



b) Graf její derivace
 $f'(x) = x^2 - 6x + 8$

2. ↘ na $(-\infty, 2)$, ↗ na $\langle 2, +\infty)$
3. ↗ na $(-\infty, -1)$, ↘ na $\langle -1, 0)$, ↘ na $\langle 0, 1)$, ↗ na $\langle 1, +\infty)$
4. ↗ na $(-\infty, -4)$, ↘ na $\langle -4, -1)$, ↘ na $\langle -1, 2)$, ↗ na $\langle 2, +\infty)$
5. ↗ na $\langle 1, +\infty)$
6. ↗ na $(-\infty, 0)$, ↘ na $\langle 0, +\infty)$
7. ↗ na $(-\infty, -2)$, ↘ na $\langle -2, 0)$, ↗ na $\langle 0, +\infty)$
8. ↘ na $\langle 4, 6)$,

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kuben J., Šarmanová P., Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: dp.pdf. Dostupný z WWW: <<http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/dp.pdf>>.
- FSI matematika online, Studijní text [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: Monotonnost-extremy.pdf. Dostupný z WWW: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=921>.
- Archiv autora