INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Aplikace derivací – výpočet limit l`Hospitalovým pravidlem
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0214
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	20.11.2013
Datum ověření ve výuce:	25.11.2013
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě předložených vztahů zvládne vypočítat limity funkcí s využitím l'Hospitalova pravidla.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o derivacích a limitách. Může být použit k získání klasifikace.

Aplikace derivací – výpočet limit l'Hospitalovým pravidlem

Nyní, když máme k dispozici derivace, uvedeme efektivnější nástroj pro výpočet limit, než je výpočet pomocí úprav výrazů v limitě. Tímto prostředkem je tzv. l'Hospitalovo pravidlo.

L'Hospitalovo pravidlo lze použít pro výpočet limit typu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, kde $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, a platí jedna z podmínek $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$. Pokud navíc existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje i limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}} \tag{1}$$

Zjednodušeně lze říci, že L'Hospitalovým pravidlem lze požítat pouze limity typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$, a to pouze v případě, pokud existuje limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Poznámky:

- Číslo x_0 může být libovolné reálné číslo, nebo dokonce i nevlastní hodnota $-\infty$ či $+\infty$.
- L'Hospitalovo pravidlo platí i pro jednostranné limity.
- **Pozor!** Ve výrazu $\frac{f(x)}{g(x)}$ derivujeme zvlášť čitatele a zvlášť jmenovatele, nejedná se tedy v žádném případě o derivaci podílu!
- L'Hospitalovo pravidlo lze v průběhu výpočtu použít opakovaně.
- Pokud $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, pak nelze použít l'Hospitalovo pravidlo a je třeba hledat jinou cestu, jak danou limitu vypočítat.

Příklad: Vypočítejte následující úlohy:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}, \qquad \text{c) } \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+1},$$

$$\text{d) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}, \qquad \text{e) } \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}, \quad a \in (0,\infty).$$

Ukázkový výpočet:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\text{b) } \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2x}{2x-1} = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{c) } \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

$$\text{d) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1.$$

$$\text{e) } \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a^x \cdot \ln a}{1} = \lim_{x\to 0} a^x \cdot \ln a = a^0 \cdot \ln a = \ln a.$$

Podle předchozího návodu vypočítejte L'Hospitalovým pravidlem následující úlohy:

Úloha 1. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} =$

Úloha 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x+2x}{\sin x+x} =$

Úloha 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} =$

Úloha 4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} =$

Úloha 5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} =$

Úloha 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x} =$

Úloha 7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos x-1)^2}{\sin^3 x} =$

Úloha 8. $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} =$

Úloha 9. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} =$

Úloha 10. $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \sin \frac{a}{x} =$

Úloha 11. $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) =$

Úloha 12. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \cdot \ln \cos \frac{\pi}{x} =$

Úloha 13. $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\sin x} =$

Výsledky úloh

1. $\frac{5}{3}$
2. $\frac{5}{2}$
3. 8
4. 1
5. 1
6. 2
7. 0
8. 0
9. -2
10. a
11. 1
12. $-\frac{\pi^2}{6}$
13. 1

Použité materiály a zdroje

- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kuben J., Šarmanová P., Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: dp.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/dp.pdf>.
- FSI matematika online, Studijní text [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: Monotonnost-extremy.pdf. Dostupný z WWW: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=921>.
- Archiv autora