



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Užití dalších základních limit
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0208
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	5.10.2013
Datum ověření ve výuce:	14.10.2013
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě předložených vztahů zvládne vypočítat další netradiční limity funkcí.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o limitách. Může být použit k získání klasifikace.

Užití dalších základních limit

Bez důkazu předkládáme vztahy pro výpočet dalších základních limit. Tyto vztahy následně použijete pro výpočet zadaných úloh.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad a > 0$$

(4)

Příklad: Vypočítejte $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^x =$

Návod: Zavedeme $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+4}$, čili $x = z - 4$. Když $x \rightarrow \infty$, pak také $z \rightarrow \infty$.

Ukázkový výpočet:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^x = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z-4} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z}{\left(1 + \frac{1}{z}\right)^4} = \frac{\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z}{\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^4} = \frac{e}{1^4} = e$$

Podle předchozího návodu převedte zadané limity na typ (1) – (4) a vypočítejte.

Úloha 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x =$

Úloha 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x+3} =$

Úloha 3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} =$

Úloha 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x =$

Úloha 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{cotg}^2 x} =$

Úloha 6. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}} =$

Úloha 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1} =$

Úloha 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x =$

Úloha 9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+1} =$

Úloha 10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^x =$

Úloha 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-1}{x} =$

Úloha 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} =$

Úloha 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{mx}-1}{x} =$

Úloha 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-b^x}{x} =$

Výsledky úloh

1. e^3

2. e^4

3. e^2

4. $e^{-\frac{1}{3}}$

5. e^3

6. e^{-4}

7. e

8. e^{-1}

9. e

10. e^{-1}

11. a

12. $a - b$

13. $m \cdot \ln a$

14. $\ln \frac{a}{b}$

Použité materiály a zdroje

- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora