INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Geometrický význam nevlastní limity ve vlastním bodě
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0205
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	18.9.2013
Datum ověření ve výuce:	9.10.2013
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Pozná souvislost mezi asymptotickým chováním grafů funkcí a nevlastní limitou ve vlastním bodě a umí aplikovat získané poznatky při výpočtu svislých asymptot.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o limitách. Může být použit k získání klasifikace.

Geometrický význam nevlastní limity ve vlastním bodě

Má-li funkce $f\colon y = f(x)$ v bodě x_0 nevlastní limitu (popř. jen jednostrannou), pak je přímka $a_s\colon x = x_0$ tzv. „svislou asymptotou“ grafu funkce f (asymptota rovnoběžná s osou o_y).
Výpočtem nevlastní limity ve vlastním bodě x_0 lze zjistit polohu křivky (představující graf funkce) vzhledem k asymptotě v jednotlivých polorovinách vyťatých asymptotou.

Mohou nastat 4 možnosti (ve všech případech má asymptota rovnici $a_s\colon x = x_0$):

1. $^+|^+$ Existuje nevlastní limita $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Tuto situaci symbolicky označujeme $^+|^+$.

2. $_-|_-$ Existuje nevlastní limita $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. Symbolicky označujeme $_-|_-$.

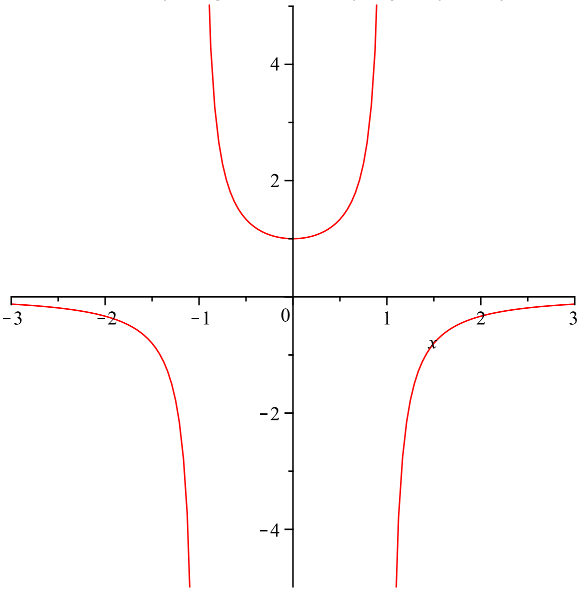
3. $^+|_-$ Limita v bodě x_0 sice neexistuje, nicméně existují obě jednostranné nevlastní limity v bodě x_0 tj. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$. Označujeme $^+|_-$.

4. $_-|^+$ Limita v bodě x_0 opět sice neexistuje, ale opět existují obě jednostranné nevlastní limity v bodě x_0 tj. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$. Označujeme $_-|^+$.

Příklad: Je dána funkce $f\colon y = \frac{1}{1-x^2}$. Určete rovnice asymptot rovnoběžných s osou o_y a vyjádřete polohu křivky vzhledem k asymptotám.

Návod: Snadno určíme definiční obor funkce f. Je zřejmé, že existují dva body nespojitosti ± 1. Vypočítejme nyní obě jednostranné limity v bodě -1 a $+1$ a na základě výsledku označíme příslušným symbolem polohu křivky vzhledem k asymptotám.

Výsledek: Zřejmě je $\lim\limits_{x\to -1^-} \left(\frac{1}{1-x^2}\right) = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to -1^+} \left(\frac{1}{1-x^2}\right) = +\infty$. V tomto případě nastává situace označená symbolicky jako $_-|^+$. Zřejmě je také $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{1-x^2}\right) = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{1-x^2}\right) = -\infty$, proto situaci označíme symbolicky jako $^+|_-$. Příslušné symboly zcela jednoznačně vyjadřují, jak vypadá křivka grafu funkce vzhledem k asymptotám. Pro názornost dáváme k dispozici graf vyšetřované funkce, aby mohlo být řešení porovnáno se skutečným grafem. Asymptoty mají rovnice $a_1\colon x = -1$, $a_2\colon x = 1$.



Podle předchozího návodu vypočítejte nevlastní limity, určete rovnice asymptot rovnoběžných s osou o_y a vyjádřete polohu křivky vzhledem k asymptotám. Následně načrtněte část grafu v blízkosti asymptoty a užitím vypočtených několika bodů grafu se pokuste odhadnout tvar grafu funkce.

Úloha 1. $f_1\colon y = \frac{2x}{x^2-4}$

Úloha 2. $f_2\colon y = \frac{x^2}{x^2-1}$

Úloha 3. $f_3\colon y = \frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$

Úloha 4. $f_4\colon y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

Úloha 5. $f_5\colon y = x + \frac{2x}{x^2-1}$

Úloha 6. $f_6\colon y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$

Výsledky úloh

1. $a_1\colon x = -2,\ {}_{-}|^{+}$ $\quad a_2\colon x = 2,\ {}_{-}|^{+}$

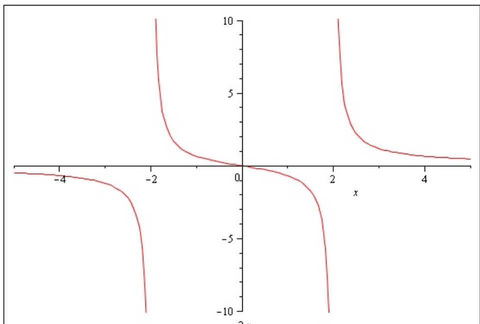
2. $a_1\colon x = -1,\ {}^{+}|_{-}$ $\quad a_2\colon x = 1,\ {}_{-}|^{+}$

3. $a_1\colon x = -3,\ {}^{+}|_{-}$ $\quad a_2\colon x = 1,\ {}_{-}|^{+}$

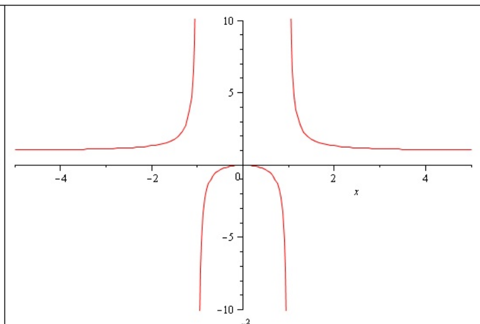
4. $a_1\colon x = 0,\ {}_{-}|^{+}$ $\quad a_2\colon x = 1,\ {}^{+}|_{-}$ $\quad a_3\colon x = 2,\ {}_{-}|^{+}$

5. $a_1\colon x = -1,\ {}_{-}|^{+}$ $\quad a_2\colon x = 1,\ {}_{-}|^{+}$

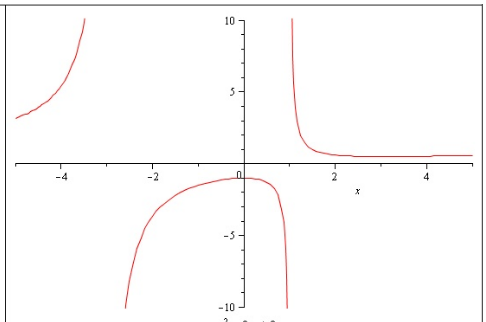
6. $a_1\colon x = 0,\ {}^{+}|^{+}$ $\quad a_2\colon x = 1,\ {}_{-}|_{-}$



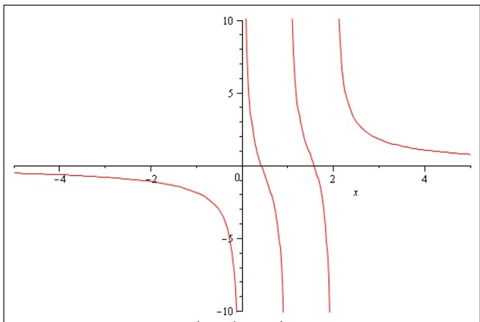
$y = \frac{2x}{x^2-4}$.



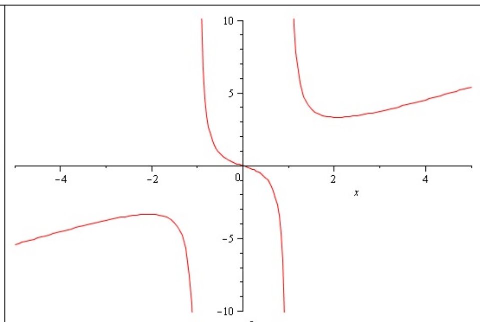
$y = \frac{x^2}{x^2-1}$.



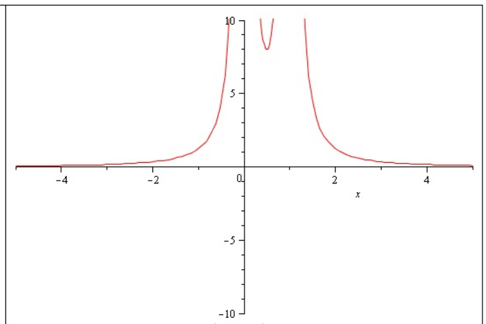
$y = \frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$.



$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.



$y = x + \frac{2x}{x^2-1}$.



$y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

Použité materiály a zdroje

- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Archiv autora