evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Vlastní a nevlastní limity ve vlastních a nevlastních bodech
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0204
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	18.9.2013
Datum ověření ve výuce:	9.10.2013
Druh učebního materiálu:	prezentace
Očekávaný výstup:	Student si dělá poznámky k probíranému tématu a průběžně řeší předkládané úlohy
Metodické poznámky:	Materiál – prezentace – je určen jako osnova výkladu nového učiva resp. pro účely opakování

Vlastní a nevlastní limity ve vlastních a nevlastních bodech

Jaroslav Hajtmar

18.9.2013

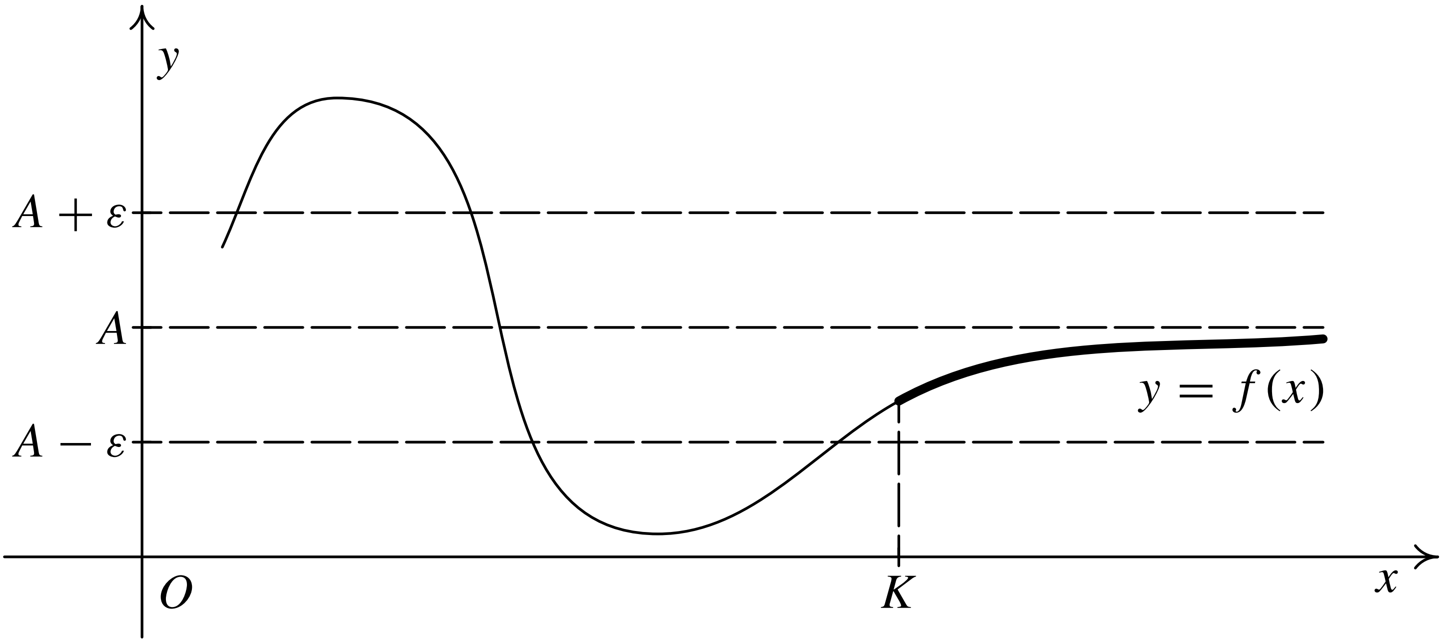
Vlastní limita v nevlastním bodě $+\infty$

DEF. Funkce $f\colon y = f(x)$ má pro $x \to +\infty$ (x jdoucí do $+\infty$) limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x > K$ platí, že $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Píšeme :

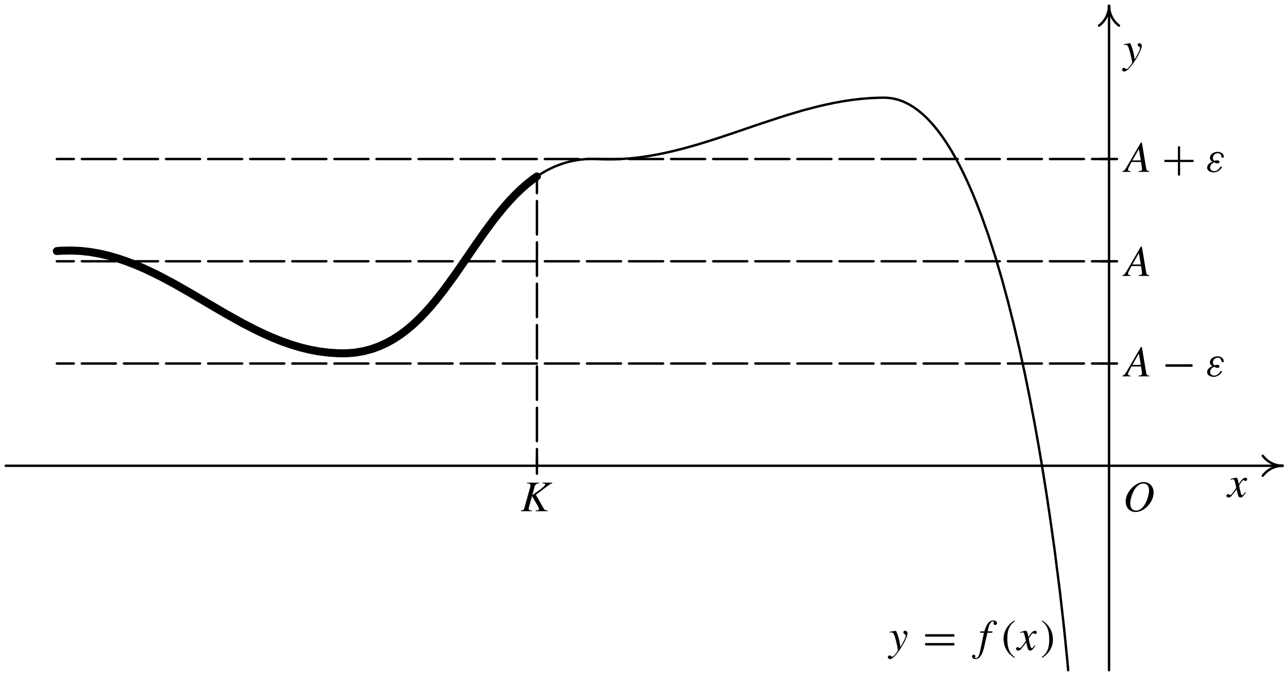
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

Jednoduše řečeno: Pro argument x, zvětšující se nade všechny meze se funkční hodnota blíží ke konečné (vlastní) hodnotě A.

Geom. interp. vlastní limity v nevlast. bodě



Vlastní limita v nevlastním bodě $-\infty$



Úloha. Podle předchozí definice a obrázku, vyslovte definici vlastní limity v nevlastním bodě $-\infty$ tj. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

Některé důležité limity

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \;\; a > 0}$$

Příklady – limity v nevlastním bodě

Vypočítejte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+5}{3x-6} =$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^4-x^3+4}{5x^4+x^3+2} =$ $\left[\frac{2}{5}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log x+5}{3\log x-1} =$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

d) Petáková str. 154, cvičení 11, 13

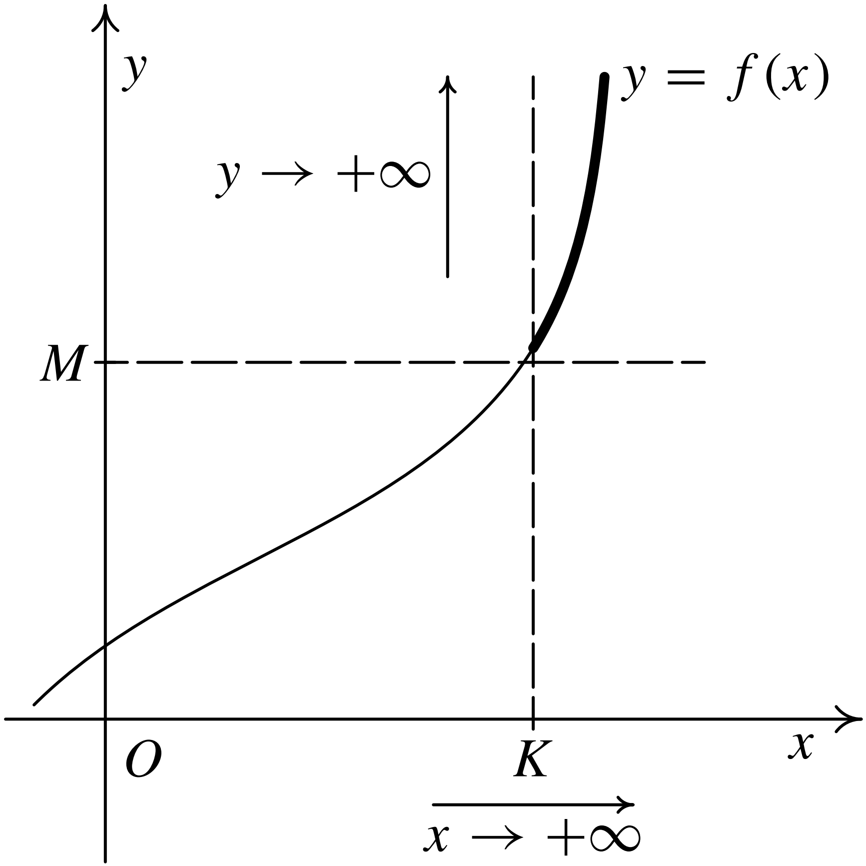
Nevlastní limita v nevlastním bodě $+\infty$

DEF. Funkce f: $y = f(x)$ má pro $x \to +\infty$ (x jdoucí do $+\infty$) nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu $M \in \mathbb{R}$ existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x > K$ platí, že $f(x) > M$. Píšeme :

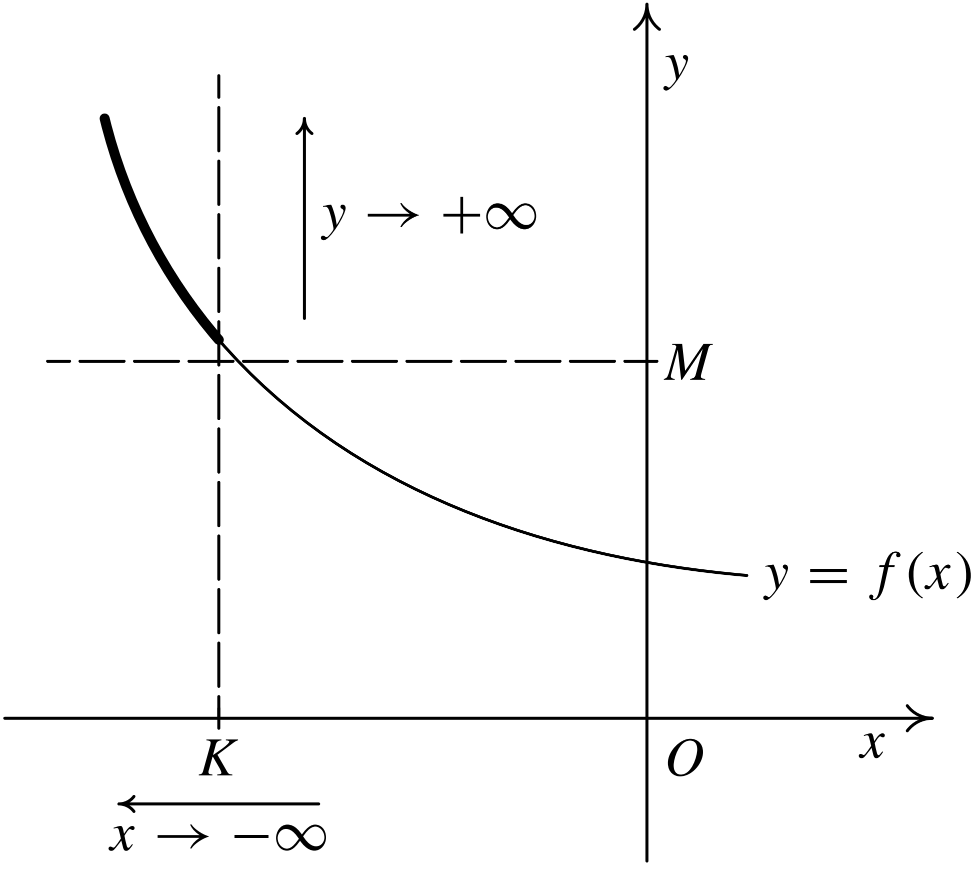
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Jednoduše řečeno: Pro argumenty x, zvětšující se nade všechny meze se funkční hodnoty taktéž zvětšují nad libovolně velkou hodnotu. Pro jakoukoliv hranici M nalezneme hodnotu argumentu, od níž jsou funkční hodnoty větší než tato hranice.

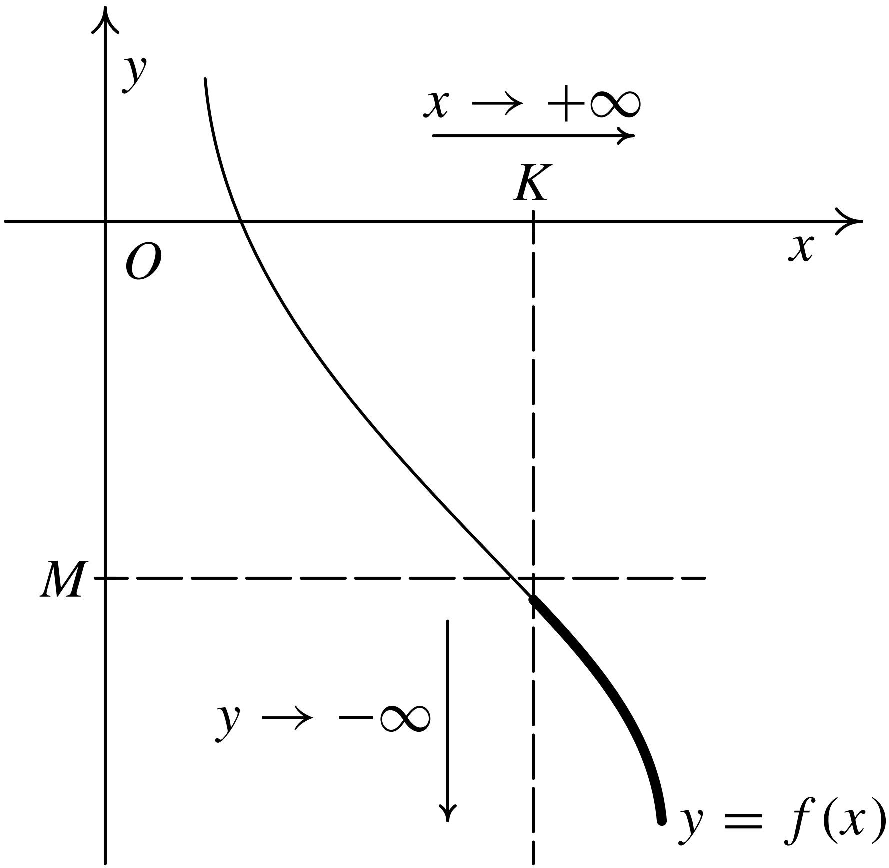
Geometr. interpretace $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



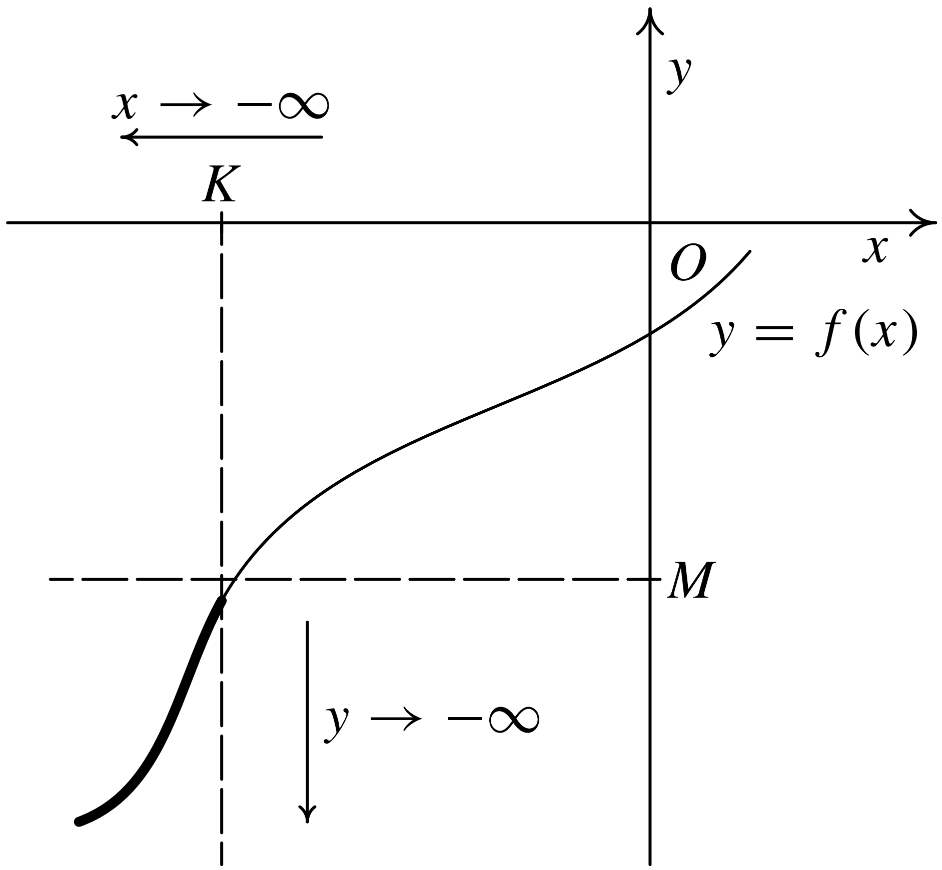
Odvoďte definici $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



Odvoďte definici $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



Odvoďte definici $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



Limity elementárních funkcí.
Načrtněte grafy a odvoďte limity

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty,\ a > 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0,\ a > 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0,\ 0 < a < 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty,\ 0 < a < 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} x = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^s = +\infty \text{ pro } s > 0,$$

$$\lim_{x\to0^+} x^s = 0 \text{ pro } s > 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^s = 0 \text{ pro } s < 0,$$

$$\lim_{x\to0^+} x^s = +\infty \text{ pro } s < 0.$$

Nevlastní limity v nevlastním bodě

Vypočítejte následující limity.

Petáková str. 154, cvičení 12

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kuben J., Šarmanová P., Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: dp.pdf. Dostupný z WWW: <http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/dp.pdf>.
- FSI matematika online, Studijní text [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: Monotonnost-extremy.pdf. Dostupný z WWW: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=921>.
- Archiv autora