evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál

vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Diferenciální počet
Název učebního materiálu:	Vlastní a nevlastní limity ve vlastním bodě
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0202
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	4. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	9.9.2013
Datum ověření ve výuce:	18.9.2013
Druh učebního materiálu:	prezentace
Očekávaný výstup:	Student si dělá poznámky k probíranému tématu a průběžně řeší předkládané úlohy
Metodické poznámky:	Materiál – prezentace – je určen jako osnova výkladu nového učiva resp. pro účely opakování

Vlastní a nevlastní limity ve vlastním bodě

Jaroslav Hajtmar

9.9.2013

Vlastnosti limit

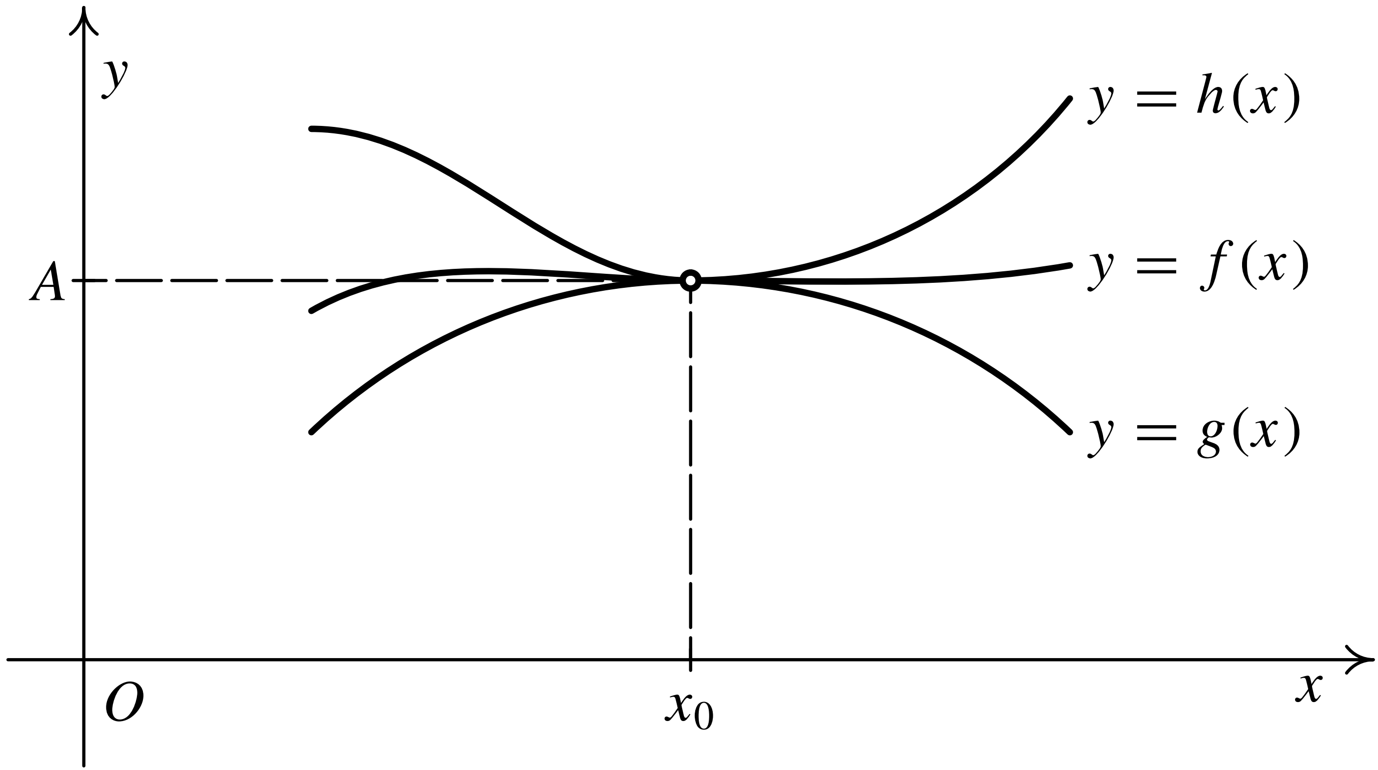
- Každá funkce má nejvýše jednu limitu
- Funkce má v bodě x_0 limitu právě tehdy, když jsou si obě jednostranné limity rovny.
- Pokud se jednostrané limity v bodě x_0 nerovnají nebo některá z nich neexistuje, pak limita funkce v bodě x_0 **neexistuje**.
- Počítáme limity ve vlastních i nevlastních bodech. Pokud limita existuje, může být buď vlastní nebo nevlastní.
- Limita funkce f spojité v bodě x_0 je rovna $f(x)$.
- Pokud má funkce v každém bodě otevřeného intervalu vlastní limitu, je na tomto intervalu spojitá.

Základní věty o limitách

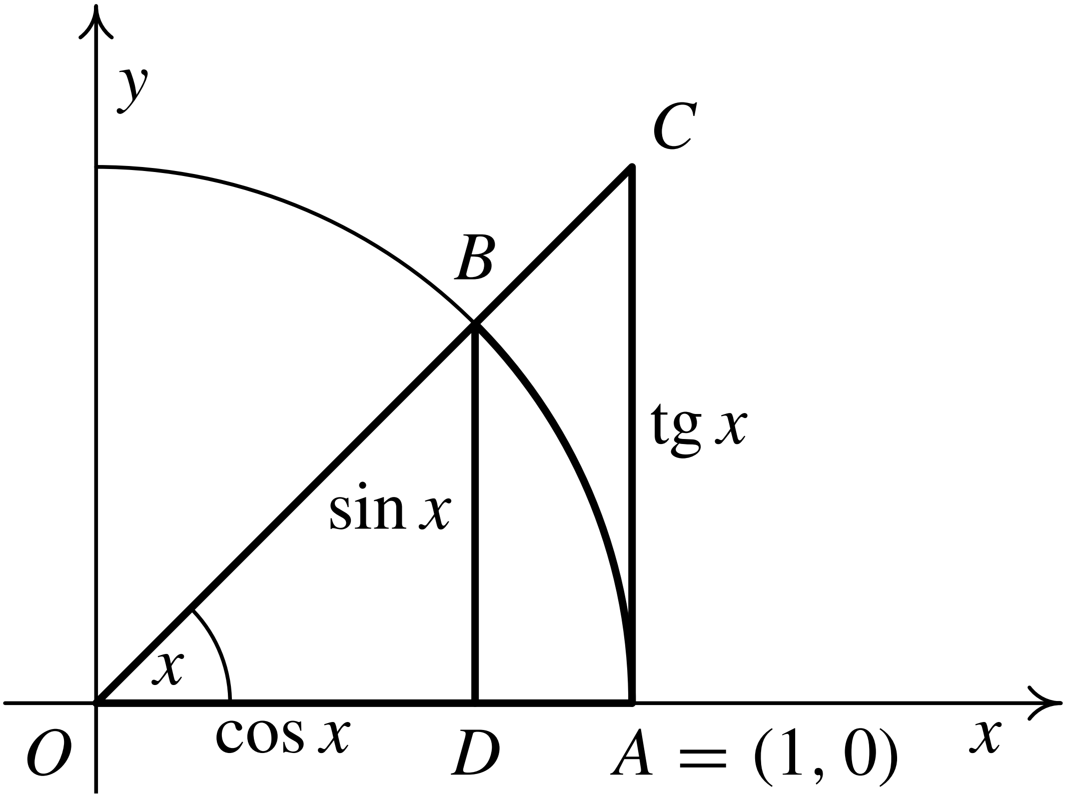
Pro funkce $f\colon y = f(x)$ a $g\colon y = g(x)$, konstantu $c \in \mathbb{R}$ a hodnotu $A \in \mathbb{R}^*$ platí:

- $\lim\limits_{x\to A} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to A} f(x) \pm \lim\limits_{x\to A} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to A} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to A} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to A} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to A} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to A} f(x)}{\lim\limits_{x\to A} g(x)} \qquad (\lim\limits_{x\to A} g(x) \neq 0)$
- $\lim\limits_{x\to A} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to A} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to A} f\,(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to A} g(x)\right)$ (vyslovte nutné předpoklady)
- $\lim\limits_{x\to A} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to A} f(x)|$
- Věta „o sevření“

Jaká bude limita funkce f v bodě x_0, známe-li limity funkcí g a h v bodě x_0? Pokuste se vyslovit větu „o sevření“.



Věta o sevření: $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$



Příklady – limity spojitých funkcí

Vypočítejte následující limity.

Využijte spojitosti funkcí v daných bodech:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\ln x + x^2 + 3 \right) =$ $[4]$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{3x^3 + x^2 - 2x + 11}{x^2 + x + 1} =$ $[11]$

c) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\cos x}{x} =$ $\left[-\frac{1}{\pi} \right]$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + 2^x \sin x}{\ln(1+x) + (x+1)\cos x} =$ $[1]$

Příklady – odstranitelná nespojitost:

Sestrojte grafy funkcí:

$f : y = \frac{x^2-4}{x-2}$

$g : y = x + 2$

Porovnejte grafy a odhadněte z grafů limity funkcí:

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} =$

$\lim\limits_{x \to 2} (x + 2) =$

Jaké mají funkce vlastnosti? Jaké mají rozdíly?

Nyní spočítejte limity a ověřte odhadnuté výsledky.

Příklady – limity funkcí s odstranitelnou nespojitostí

Vypočítejte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} =$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1} =$ $[2]$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2}{x^4-16} =$ $\left[\frac{3}{8}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x} =$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} =$ $[5]$

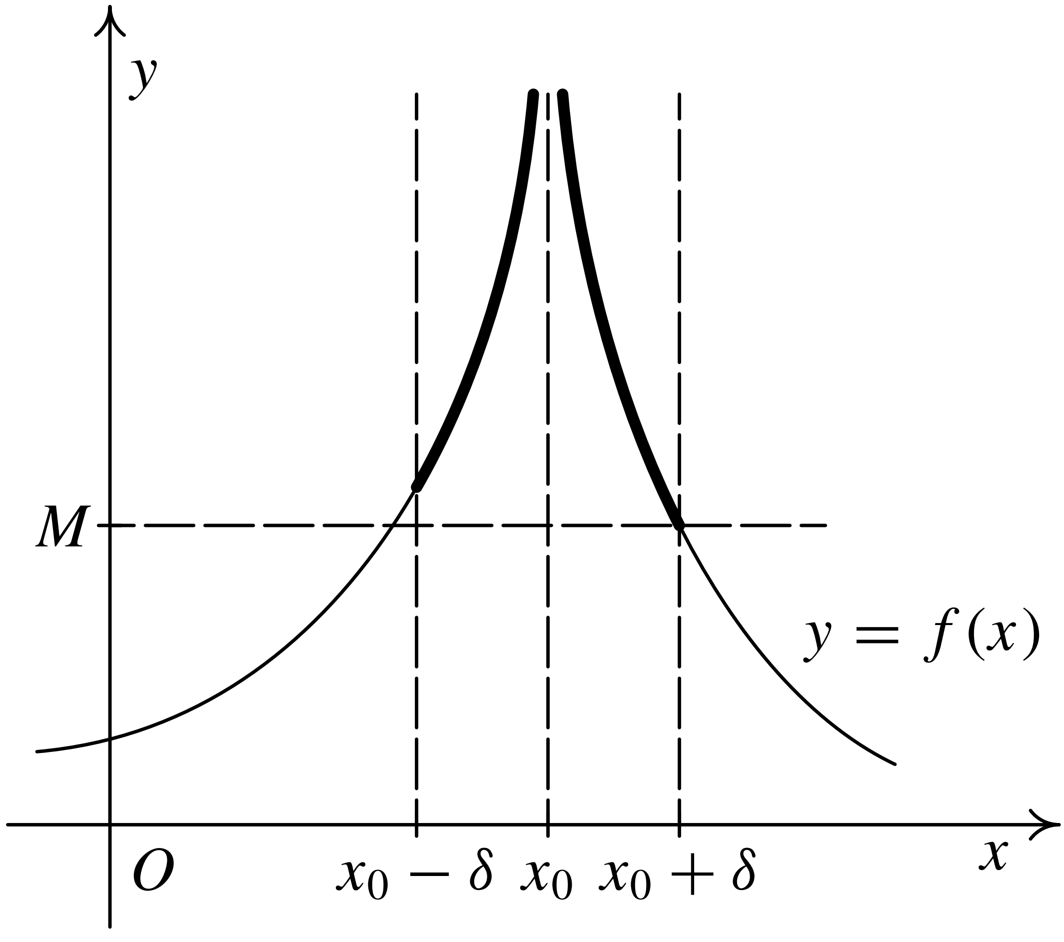
Nevlastní limita $+\infty$ ve vlastním bodě x_0

DEF. Funkce $f : y = f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $+\infty$, jestliže $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ takové, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ platí, že $f(x) > M$. Píšeme :

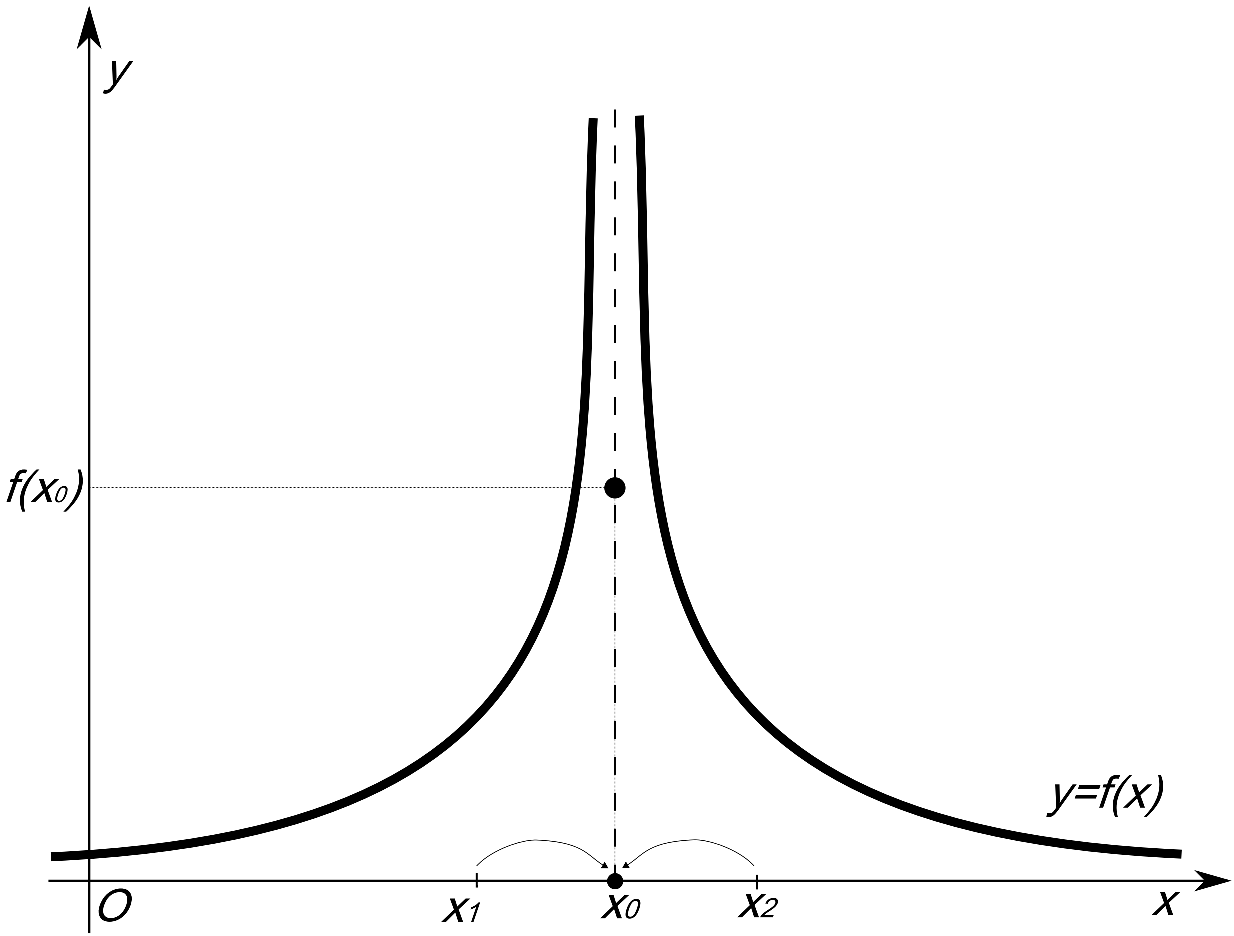
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Jednoduše řečeno: V neustále se zužujícím okolí bodu x_0 rostou funkční hodnoty funkce nade všechny meze. Pro každou sebevětší hodnotu M musíme umět nalézt okolí bodu x_0, na němž celém funkce nabývá hodnot větších než M.

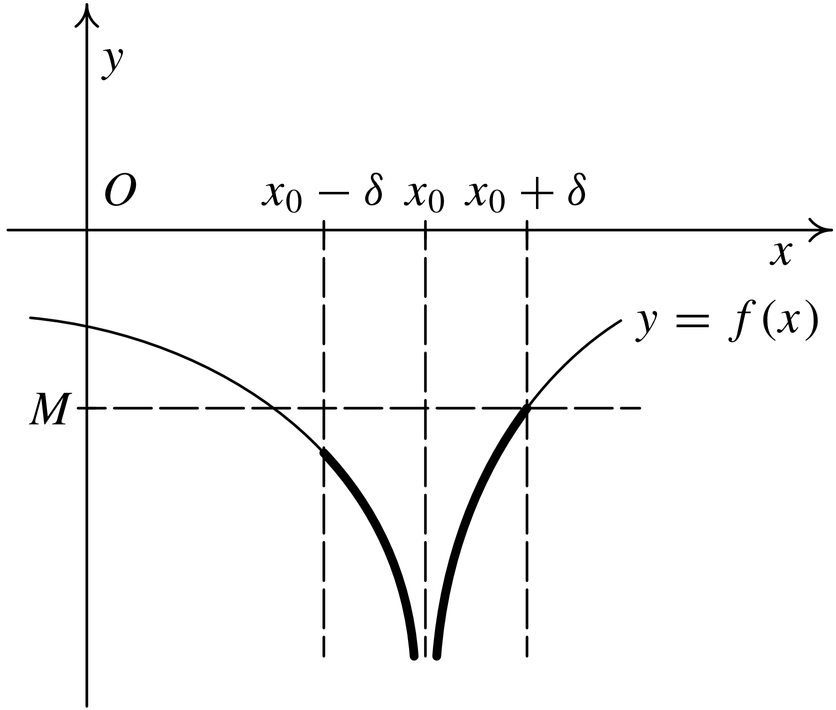
Geom. interp. nevlastní limity ve vl. bodě



Funkční hodnota v bodě x_0 nijak nesouvisí s nevlastní hodnotou limity!

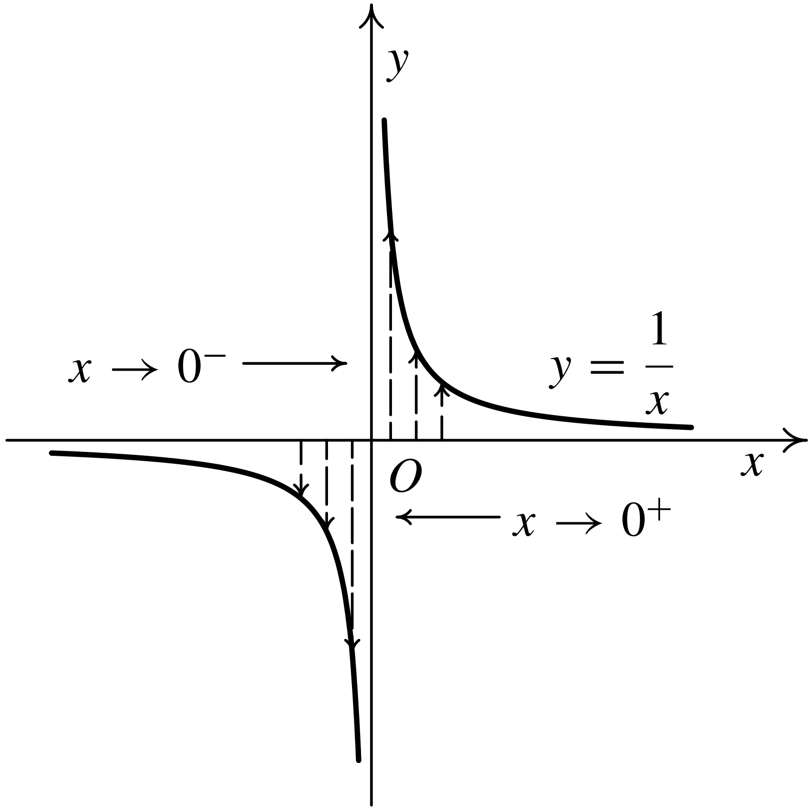


Nevlastní limita $-\infty$ ve vlastním bodě x_0



Úloha. Na základě předchozí definice a geometrické interpretace nevlastní limity $-\infty$ z obrázku vyslovte definici nevlastní limity $-\infty$ ve vlastním bodě x_0 tj. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Určete limitu funkce $f\colon y = \frac{1}{x}$ v bodě 0.



Limity elementárních funkcí lze snadno odvodit se znalostí grafů těchto funkcí.

Jednostranné limity

Určete jednostranné limity a rozhodněte, zda existují příslušné nevlastní limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x+1}{\sin x} =$ $\left[neexistuje(\pm\infty)\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x+1}{\cos x-1} =$ $\left[-\infty\right]$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3}{(x+2)^2} =$ $\left[-\infty\right]$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x-2} =$ $\left[neexistuje(\pm\infty)\right]$

Použité materiály a zdroje

- Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.
- Tomica, R. Cvičení z matematiky – I. Brno: VAAZ, 1974.
- Kuben J., Šarmanová P., Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: dp.pdf. Dostupný z WWW: `<http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/print/dp.pdf>`.
- FSI matematika online, Studijní text [online]. 2013 [cit. 2013-04-15]. File: Monotonnost-extremy.pdf. Dostupný z WWW: `<http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=921>`.
- Archiv autora