



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzdělávací materiál vytvořený v projektu OP VK

Název školy:	Gymnázium, Zábřeh, náměstí Osvobození 20
Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0211
Název projektu:	Zlepšení podmínek pro výuku na gymnáziu
Číslo a název klíčové aktivity:	III/2 - Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Anotace

Název tematické oblasti:	Analytická geometrie
Název učebního materiálu:	Elipsa
Číslo učebního materiálu:	VY_32_INOVACE_M0115
Vyučovací předmět:	Matematika
Ročník:	3. ročník vyššího gymnázia
Autor:	Jaroslav Hajtmar
Datum vytvoření:	27.1.2013
Datum ověření ve výuce:	6.6.2014
Druh učebního materiálu:	pracovní list
Očekávaný výstup:	Na základě předložených vztahů zvládne zapsat rovnici známé elipsy popř. z rovnice elipsy danou elipsu zakreslit do souřadného systému. Zvládne převod obecné rovnice elipsy na středový tvar.
Metodické poznámky:	Materiál je určen k motivaci a procvičení učiva o elipsách. Může být použit k získání klasifikace.

Elipsa - pracovní list

Různý přístup k elipse:

Úloha 1.

Elipsa \mathcal{E} se středem S a hlavní poloosou ___ je _____ bodů X , které mají _____ vzdáleností $2a$ od bodů _____, kterým se říká _____. Ohnisková vzdálenost $2e$ je vzdálenost ohnisek E, F . Vzdálenost $|SE|$ se nazývá _____ elipsy.

Úloha 2.

Elipsa je _____, která vznikne řezem _____ plochy rovinou, která svírá s osou _____ úhel φ , který je větší než úhel, který _____ a současně menší úhel _____. Rovina přitom neprochází vrcholem rotační kuželové plochy.

Středový tvar rovnice elipsy:

Úloha 3. Načrtněte elipsu (a určete souřadnice středu S , souřadnice ohnisek F_1 a F_2 , excentricitu e , délky poloos a, b), jestliže znáte její rovnici

a) $\mathcal{E}_1: 4x^2 + 9y^2 = 36$

b) $\mathcal{E}_2: 25x^2 + y^2 = 100$

c) $\mathcal{E}_3: (x - 1)^2 + 2(y + 3)^2 = 1$

Úloha 4. Najděte rovnici elipsy, která má ohniska v bodech $F_1[-3, 2]$, $F_2[3, 2]$ a hlavní poloosu délky 5j.

Úloha 5. Najděte rovnici elipsy, která má ohniska v bodech $F_1[1, 8]$, $F_2[1, 0]$ a vedlejší poloosu délky 3j.

Úloha 6. Najděte rovnici elipsy, která má hlavní osu totožnou s osou x , její střed je v počátku soustavy souřadnic, hlavní poloosa má délku $4j$ a elipsa prochází bodem $M[-2\sqrt{3}, 1]$.

Obecná rovnice elipsy:

Známe: Úprava doplněním na čtverec. Každá obecná rovnice ve tvaru $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ nemusí určovat elipsu!

Úloha 7. Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, zda je rovnice $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ obecnou rovnicí elipsy. Pokud ano, určete souřadnice středu, poloosy, excentricitu a ohniska.

Úloha 8. Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, zda je rovnice $2x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 21 = 0$ obecnou rovnicí elipsy. Pokud ano, určete souřadnice středu, poloosy, excentricitu a ohniska.

Úloha 9. Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, zda je rovnice $3x^2 + 6y^2 + 12x + 13 = 0$ obecnou rovnicí elipsy. Pokud ano, určete souřadnice středu, poloosy, excentricitu a ohniska.

Úloha 10. Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, zda je rovnice $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y + 24 = 0$ obecnou rovnicí elipsy. Pokud ano, určete souřadnice středu, poloosy, excentricitu a ohniska.

Úloha 11. Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, zda je rovnice $4x^2 + y^2 - 4x = 0$ obecnou rovnicí elipsy. Pokud ano, určete souřadnice středu, poloosy, excentricitu a ohniska.

Úloha 12. Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, zda je rovnice $4x^2 + y^2 + 8\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 6 = 0$ obecnou rovnicí elipsy. Pokud ano, určete souřadnice středu, poloosy, excentricitu a ohniska.

Výsledky úloh

1.

Elipsa \mathcal{E} se středem S a hlavní polosou a je množina bodů X , které mají konstantní součet vzdáleností $2a$ od bodů E, F , kterým se říká ohniska elipsy. Ohnisková vzdálenost $2e$ je vzdálenost ohnisek E, F . Vzdálenost $|SE|$ se nazývá excentricita elipsy.

2.

Elipsa je kuželosečka, která vznikne řezem rotační kuželové plochy rovinou, která svírá s osou rotační kuželové plochy úhel φ , který je větší než úhel, který určují osa a strana rotační kuželové plochy a současně menší úhel pravý. Rovina přitom neprochází vrcholem rotační kuželové plochy.

3. a) $S[0, 0]$, $a=3$, $b=2$, $e=\sqrt{5}$, $F_{1,2} = [\pm\sqrt{5}, 0]$;

b) $S[0, 0]$, $a=10$, $b=2$, $e=4\sqrt{6}$, $F_{1,2} = [0, \pm 4\sqrt{6}]$;

c) $S[1, -3]$, $a=1$, $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $F_{1,2} = [1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -3]$;

4. $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$;

5. $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$;

6. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$;

7. Elipsa $S[1, 2]$, $a=3$, $b=2$, $e=\sqrt{5}$, $F_{1,2} = [1 \pm \sqrt{5}, 2]$.

8. Bod $[3, -1]$

9. Neexistuje bod, jehož souřadnice by vyhovovaly rovnici.

10. Elipsa $[2, 1]$, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{6}$, $F_{1,2} = [2 \pm \frac{\sqrt{5}}{6}, 1]$.

11. Elipsa $S=[\frac{1}{2}, 0]$, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $F_{1,2} = [\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

12. Elipsa $S=[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $a = 2$, $b = 1$, $e = \sqrt{3}$, $F_{1,2} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2} \pm \sqrt{3}]$.

Použité materiály a zdroje

■ Petáková, RNDr. Jindra. Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1.vydání. Praha: Prometheus, 2003. 303 s. ISBN 8071960993.

■ Archiv autora